Analisi dimensionale dell'equazione dell'energia

Fenomeni di Trasporto

Equazioni di trasporto per fluidi newtoniani

Moto $$\rho D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \rho\mathbf{g}$$

Energia
(fluido incomprimibile) $$\rho\hat{C}_p DT/Dt = k\nabla^2 T + \mu\Phi_v$$

Le equazioni sono accoppiate, perché le proprietà fisiche dipendono dalla temperatura.
Ad esempio, nella convezione naturale, la dipendenza della densità dalla temperatura è la causa del moto

La convezione naturale

Moto $$\rho D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \rho\mathbf{g}$$

Energia
(fluido incomprimibile)
$$\rho\hat{C}_p DT/Dt = k\nabla^2 T + \mu\Phi_v$$

Approx. di Boussinesq $$\rho(T) = \bar{\rho} - \bar{\rho}\bar{\beta}(T - \bar{T})$$

$$\bar{\beta} = -(1/\rho)(\partial\rho/\partial T)_p$$

La convezione naturale approssimazione di Boussinesq

Moto $$\bar{\rho}\,\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \underbrace{\boxed{(-\nabla p + \bar{\rho}\mathbf{g})}}_{\mathcal{P}} - [\nabla \cdot \tau] - \boxed{\bar{\rho}\mathbf{g}\bar{\beta}(T - \bar{T})}$$

Trascurabile nella convezione naturale

Trascurabile nella convezione forzata

Energia $$\bar{\rho}\hat{C}_p DT/Dt = k\nabla^2 T + \mu\Phi_v$$

Analisi dimensionale delle equazioni di bilancio

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

$$\bar{\rho}\,\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla\mathcal{P} + \mu\nabla^2\mathbf{v} - \bar{\rho}\mathbf{g}\bar{\beta}(T - \bar{T})$$

$$\bar{\rho}\hat{C}_p\,\frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + \mu\Phi_v$$

Analisi dimensionale delle equazioni di bilancio

Variabili adimensionali

$$\breve{x} = \frac{x}{l_0} \qquad \breve{y} = \frac{y}{l_0} \qquad \breve{z} = \frac{z}{l_0} \qquad \breve{t} = \frac{v_0 t}{l_0}$$

$$\breve{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_0} \qquad \breve{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_0}{\bar{\rho} v_0^2} \qquad \breve{T} = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$$

$$\breve{\Phi}_v = \left(\frac{l_0}{v_0}\right)^2 \Phi_v \qquad \breve{\nabla} = l_0 \nabla \qquad \frac{D}{D\breve{t}} = \left(\frac{l_0}{v_0}\right) \frac{D}{Dt}$$

Forma adimensionale delle equazioni di bilancio

$$(\breve{\nabla} \cdot \breve{\mathbf{v}}) = 0$$

$$\frac{D\breve{\mathbf{v}}}{D\breve{t}} = -\breve{\nabla}\breve{\mathcal{P}} + \left[\!\left[\frac{\mu}{l_0 v_0 \bar{\rho}}\right]\!\right]\breve{\nabla}^2\breve{\mathbf{v}} - \left[\!\left[\frac{g l_0 \bar{\beta}(T_1 - T_0)}{v_0^2}\right]\!\right]\left(\frac{\mathbf{g}}{g}\right)(\breve{T} - \breve{\bar{T}})$$

$$\frac{D\breve{T}}{D\breve{t}} = \left[\!\left[\frac{k}{l_0 v_0 \bar{\rho}\hat{C}_p}\right]\!\right]\breve{\nabla}^2\breve{T} + \left[\!\left[\frac{\mu v_0}{l_0 \bar{\rho}\hat{C}_p(T_1 - T_0)}\right]\!\right]\breve{\Phi}_v$$

Principali numeri adimensionali

$$\mathrm{Re} = [\![l_0 v_0 \rho / \mu]\!] = [\![l_0 v_0 / \nu]\!] = \textit{Reynolds}$$

$$\mathrm{Pr} = [\![\hat{C}_p \mu / k]\!] = [\![\nu / \alpha]\!] = \textit{Prandtl}$$

$$\mathrm{Gr} = [\![g\beta(T_1 - T_0) l_0^3 / \nu^2]\!] = \textit{Grashof}$$

$$\mathrm{Br} = [\![\mu v_0^2 / k(T_1 - T_0)]\!] = \textit{Brinkman}$$

$$\mathrm{P\acute{e}} = \mathrm{RePr} = \textit{Péclet}$$

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{GrPr} = \textit{Rayleigh}$$

$$\mathrm{Ec} = \mathrm{Br}/\mathrm{Pr} = \textit{Eckert}$$

Scelta della velocità di riferimento

Caso particolare ⟶	Convezione forzata	Caso intermedio	Convezione naturale
$\left[\frac{\mu}{l_0 v_0 \bar{\rho}}\right]$	$\frac{1}{\mathrm{Re}}$	$\frac{1}{\mathrm{Re}}$	1
$\left[\frac{g l_0 \bar{\beta}(T_1 - T_0)}{v_0^2}\right]$	trascurabile	$\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}$	Gr
$\left[\frac{k}{l_0 v_0 \bar{\rho} \hat{C}_p}\right]$	$\frac{1}{\mathrm{RePr}}$	$\frac{1}{\mathrm{RePr}}$	$\frac{1}{\mathrm{Pr}}$
$\left[\frac{\mu v_0}{l_0 \bar{\rho} \hat{C}_p (T_1 - T_0)}\right]$	$\frac{\mathrm{Br}}{\mathrm{RePr}}$	$\frac{\mathrm{Br}}{\mathrm{RePr}}$	trascurabile

Forma adimensionale delle equazioni di trasporto
convezione forzata

$$\frac{D\breve{\mathbf{v}}}{D\breve{t}} = -\breve{\nabla}\breve{\mathscr{P}} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\breve{\nabla}^2\breve{\mathbf{v}}$$

$$\frac{D\breve{T}}{D\breve{t}} = \frac{1}{\mathrm{RePr}}\breve{\nabla}^2\breve{T} + \frac{\mathrm{Br}}{\mathrm{RePr}}\breve{\Phi}_v$$

Forma adimensionale delle equazioni di trasporto
caso intermedio

$$\frac{D\breve{\mathbf{v}}}{D\breve{t}} = -\breve{\nabla}\breve{\mathscr{P}} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \breve{\nabla}^2\breve{\mathbf{v}} - \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\left(\frac{\mathbf{g}}{g}\right)(\breve{T} - \bar{\breve{T}})$$

$$\frac{D\breve{T}}{D\breve{t}} = \frac{1}{\mathrm{RePr}} \breve{\nabla}^2\breve{T} + \frac{\mathrm{Br}}{\mathrm{RePr}} \Phi_v$$

Forma adimensionale delle equazioni di trasporto
convezione naturale

$$\frac{D\breve{\mathbf{v}}}{D\breve{t}} = -\breve{\nabla}\breve{\mathcal{P}} + \breve{\nabla}^2\breve{\mathbf{v}} - \mathrm{Gr}\left(\frac{\mathbf{g}}{g}\right)(\breve{T} - \bar{\breve{T}})$$

$$\frac{D\breve{T}}{D\breve{t}} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\breve{\nabla}^2\breve{T}$$

Significato fisico dei principali numeri adimensionali

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v_0^2/l_0}{\mu v_0/l_0^2} = \frac{\text{Forze inerziali}}{\text{Forze viscose}}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{\rho v_0^2/l_0}{\rho g} = \frac{\text{Forze inerziali}}{\text{Forza di gravità}}$$

$$\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2} = \frac{\rho g \beta (T_1 - T_0)}{\rho v_0^2/l_0} = \frac{\text{Forza di galleggiamento}}{\text{Forze inerziali}}$$

$$\mathrm{Pé} = \mathrm{RePr} = \frac{\rho \hat{C}_p v_0 (T_1 - T_0)/l_0}{k(T_1 - T_0)/l_0^2} = \frac{\text{Trasporto di energia per convezione}}{\text{Trasporto di energia per conduzione}}$$

$$\mathrm{Br} = \frac{\mu (v_0/l_0)^2}{k(T_1 - T_0)/l_0^2} = \frac{\text{Calore prodotto per dissipazione viscosa}}{\text{Trasporto di energia per conduzione}}$$

Forma adimensionale del coeff. di scambio termico alla parete

moto in condotti

$$\frac{D\breve{T}}{D\breve{t}} = \frac{1}{\mathrm{RePr}} \breve{\nabla}^2 \breve{T} + \frac{\mathrm{Br}}{\mathrm{RePr}} \Phi_v$$

$$\breve{T} = \breve{T}(\breve{r}, \theta, \breve{z}, \breve{t}; \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Br})$$

$$\breve{r} = r/D$$

$$\breve{z} = z/D$$

$$\breve{T} = (T - T_0)/(T_{b1} - T_0)$$

Forma adimensionale del coeff. di scambio termico alla parete

moto in condotti

$$Q(t) = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(+k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \bigg|_{r=R} R \, d\theta \, dz$$

$$h_1(t) = \frac{1}{\pi D L (T_0 - T_{b1})} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(+k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \bigg|_{r=R} R \, d\theta \, dz$$

$$\check{r} = r/D$$

$$\check{z} = z/D$$

$$\check{T} = (T - T_0)/(T_{b1} - T_0)$$

$$\mathrm{Nu}_1(t) = \frac{1}{2\pi L/D} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial \check{T}}{\partial \check{r}} \right) \bigg|_{\check{r}=1/2} d\theta \, d\check{z}$$

Forma adimensionale del coeff. di scambio termico alla parete
moto in condotti

$$\mathrm{Nu}_1(t) = \frac{1}{2\pi L/D} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial \check{T}}{\partial \check{r}} \right) \bigg|_{\check{r}=1/2} d\theta \, d\check{z}$$

$$\check{T} = \check{T}(\check{r}, \theta, \check{z}, \check{t}; \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Br})$$

$$\mathrm{Nu}_1 = \mathrm{Nu}_1(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Br}, L/D)$$

Forma adimensionale del coeff. di scambio termico alla parete

moto in condotti

$$\mathrm{Nu}_1 = \mathrm{Nu}_1(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Br}, L/D)$$