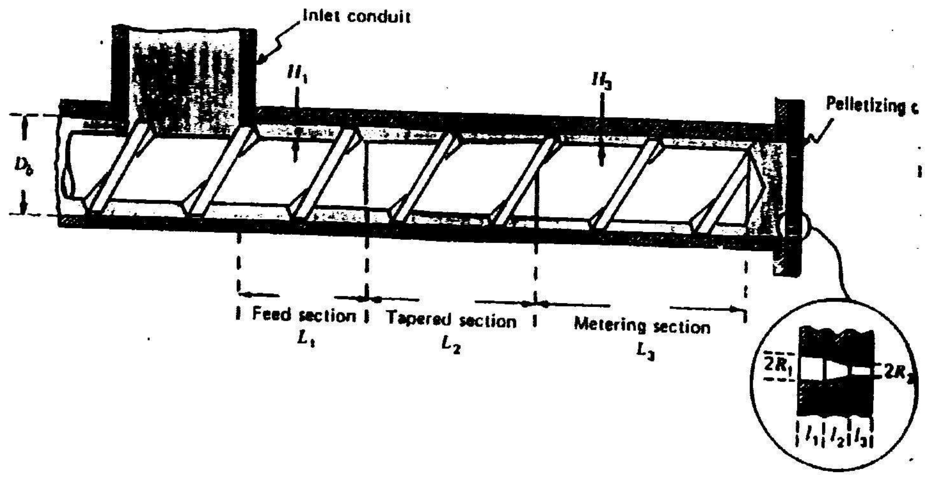
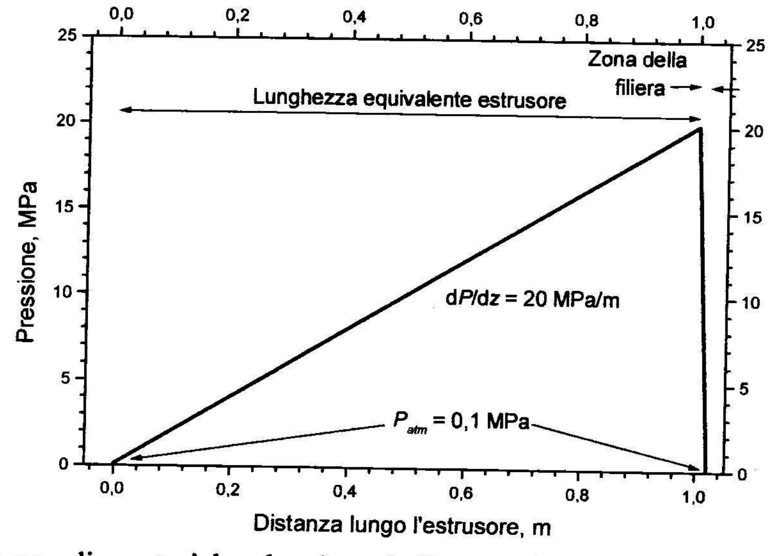
# Estrusione

Una operazione unitaria estremamente diffusa nell'industria tessile ed alimentare, sempre presente nei processi di trasformazione dei materiali polimerici è l'**estrusione**, che consiste nell'alimentare una pasta (un fluido o una sospensione) attraverso un condotto anulare fino ad una filiera. In figura è schematizzato un estrusore, in cui sono evidenti a sinistra la tramoggia di alimentazione (*inlet conduit*), la vite e il "mantello" entro il quale la vite senza fine, ruotando, causa l'avanzamento del materiale. La filiera (*pellettizing die*) è alla destra, insieme ad un dettaglio dei fori di estrusione.



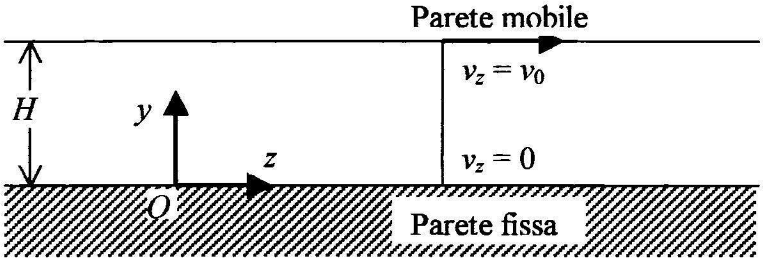

Il passaggio del materiale attraverso la filiera richiede un elevata differenza di pressione, per cui il profilo di pressione nell'estrusore è del tipo riassunto nella figura sottostante.




Il flusso di materiale dovrà quindi avvenire *contro* un gradiente di pressione. La quantità di moto necessaria al trasferimento sarà fornita al materiale dal movimento della vite.

## 1. Flusso tra piani paralleli in presenza di trascinamento

Rettificando il profilo della vite ed il profilo interno del mantello si potrà descrivere il sistema utilizzando un opportuno schema alle coordinate cartesiane riportato in figura.




La parete del mantello è la parete fissa in corrispondenza della quale la componente assiale della velocità è nulla ($v_z(y=0) = 0$) in seguito dell'ipotesi di non scorrimento ("*no slip condition*"). La parete della vite è la parete mobile, che si muove con velocità $v_0$, comunicandola al materiale per cui $v_z(y=0) = v_0$. La distanza tra vite e mantello è $H$.

### 1.1 Campo delle pressioni

Il problema è indefinito lungo la direzione $x$ (la direzione uscente dal foglio), quindi tutte le grandezze in esame non presentano dipendenza da questa variabile.

La dipendenza principale della pressione si può assumere dalla variabile assiale, ovvero si può ipotizzare per il campo di pressione la sola dipendenza dalla variabile $z$:

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}(z) \tag{1}$$

### 1.2 Campo di moto

Il campo di moto è riassunto nell'eq. (2). La posizione $v_x = 0$ è ovvia per la nota all'inizio del paragrafo precedente. La componente $y$ è anch'essa nulla in quanto non c'è forza spingente capace di causare il moto in questa direzione.

$$\underline{v}(x,y,z) = \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z = v_z(y) \end{cases} \tag{2}$$

La componente assiale della velocità è non nulla e dipende solo dalla variabile $y$.

### 1.3 Campo delle tensioni

Come conseguenza del campo di moto (2) l'unica componente non nulla del tensore delle tensioni è:

$$\tau_{yz} = \tau_{yz}(y) \neq 0 \tag{3}$$

Si tratta pertanto di un classico problema di shear.

### 1.4 Equazioni del moto

Con le ipotesi (1) – (3) la componente $y$ dell'equazione del moto, senza alcuna ipotesi costitutiva, (Bird et al., p. 82, t. 3.4-2, (B)) si scrive:

$$0 = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}z} - \frac{\mathrm{d}\tau_{yz}}{\mathrm{d}y} \tag{4}$$

Che può essere integrata tra $y = 0$ e $y$ attuale ($\tau_0$ è una costante di integrazione):

$$\tau_{yz} = \tau_0 - \left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}z}\right)y \tag{5}$$

Non è tuttavia possibile scrivere una condizione al contorno sullo sforzo, in quanto il problema non presenta simmetria rispetto all'asse $y$. Il valore $\tau_0$ dell'eq. (5) rappresenta il valore dello sforzo alla parete ferma ($y = 0$), ma non è noto.

### *1.5 Equazione costitutiva: fluido Newtoniano*

L'ipotesi costitutiva di fluido Newtoniano per l'elemento non nullo del tensore degli sforzi si scrive:

$$\tau_{yz} = -\mu\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}y} \tag{6}$$

### *1.6 Risultati*

**Profilo di velocità**

L'eq. (6), introdotta nella (5), ne consente l'integrazione. Il risultato dell'integrazione è ($A$ è un'altra costante di integrazione):

$$v_z = -\frac{\tau_0}{\mu}y + \frac{y^2}{2\mu}\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}z}\right) + A \tag{7}$$

B.C. 1 $\quad @y = 0 \quad v_z = 0$

B.C. 2 $\quad @y = H \quad v_z = v_0$

La condizione al contorno B.C. 1 consente di ricavare subito $A$:

$$A = 0$$

Sostituendo la B.C. 2 nella (7) si può ricavare il valore $\tau_0$:

$$\tau_0 = \frac{H}{2}\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}z} - \frac{\mu v_0}{H} \tag{8}$$

Con il valore calcolato la (7) si può riscrivere:

$$\frac{v_z}{v_0} = \left(a^2 - a\right)\frac{H^2}{2\mu v_0}\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}z} + a, \qquad \text{con } a = \frac{y}{H} \tag{9}$$

La (9) è una parabola in funzione della $y$ adimensionalizzata. Il primo termine a secondo membro della (9) tiene conto dell'effetto del gradiente di pressione (per gradienti positivi questo termine produce un flusso *contrario* alla velocità di avanzamento della vite). Il secondo termine invece tiene conto del trascinamento dovuto alla vite stessa.

**Portata**

Si può ricavare una portata specifica (per unità di lunghezza nella direzione $z$) integrando su $y$:

$$q = \int_0^H v_z(y)\mathrm{d}y = q_v + q_p \tag{10}$$

Il primo termine al termine della (10) ($q_v$) è la portata dovuta alla velocità, e vale :

$$q_v = \int_0^H v_0 \frac{y}{H} \mathrm{d}y = \frac{v_0}{H}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^H = \frac{v_0 H}{2} \tag{11}$$

Mentre l'altro termine ($q_p$) è quello (contrario) dovuto alla pressione:

$$q_p = \int_0^H \left(\frac{y^2}{H^2} - \frac{y}{H}\right)\frac{H^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}y = \frac{H^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{y^3}{3H^2} - \frac{y^2}{2H}\right]_0^H = -\frac{H^3}{12\mu}\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}z} \tag{12}$$

Per i fluidi newtoniani dunque vale la *sovrapposizione degli effetti*, dovuta alla linearità delle equazioni (sulla velocità e sulla portata). Utilizzando equazioni costitutive reologiche non lineari (ad esempio la legge di potenza) la soluzione analitica è di determinazione più difficoltosa. Comunque è sempre vero che gradienti positivi sono caratterizzati dai termini in contrasto, e gradienti negativi portano a termini in accordo.

Ricordiamo comunque che l'estrusore, utilizzato come pompa, lavora sempre con gradienti di pressione positivi (e quindi termini di portata in contrasto).

**Pressione massima (a *H* fissato)**

Un estrusore caratterizzato da un preciso valore di $H$ (*problema di verifica*) consente la realizzazione di un valore massimo di gradiente che corrisponde a portata nulla, cioè:

$$q = 0 \Rightarrow q_v = -q_p$$

da cui il massimo gradiente realizzabile (anche se non utilizzabile perché corrispondente alla portata nulla) sarà:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}z}\right)_{\max} = \frac{6\mu v_0}{H^2} \tag{13}$$

in funzione del materiale ($\mu$), della velocità di avanzamento ($v_0$) e del *gap* tra vite e mantello ($H$).

**Pressione massima (a *q* fissata)**

Se invece è nota la portata richiesta (*problema di progetto*) si può calcolare il valore del gap $H$ che consente l'ottenimento del massimo gradiente realizzabile. Si parte dalla (10) in cui si inseriscono (11) e (12), e si ricava il gradiente di pressione:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}z} = \frac{6\mu v_0}{H^2} - \frac{12\mu q}{H^3} \tag{14}$$

Poi si deriva rispetto ad $H$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}z}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}\left(\frac{6\mu v_0}{H^2} - \frac{12\mu q}{H^3}\right) = -\frac{12\mu v_0}{H^3} + \frac{36\mu q}{H^4}$$

E si annulla la derivata:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}z}\right)_{\max} = -\frac{12\mu v_0}{H^{*3}} + \frac{36\mu q}{H^{*4}} = 0$$

Ricavando:

$$H^* = \frac{3q}{v_0} \tag{15}$$

**Profilo dello sforzo**

Per concludere si può ricavare anche il profilo dello sforzo, introducendo il risultato (8) nel profilo (5):

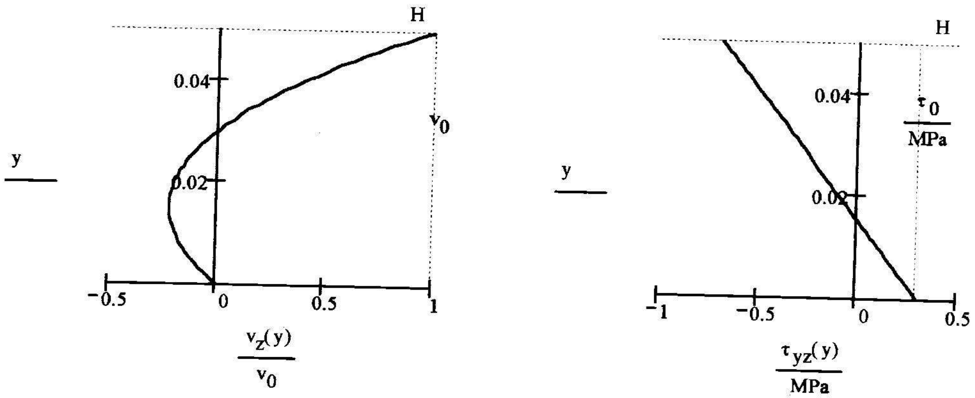
$$\tau_{yz} = \left(\frac{d\mathcal{P}}{dz}\right)\left(\frac{H}{2} - y\right) - \frac{\mu v_0}{H} \tag{17}$$

Si tratta di una retta e, come era atteso, non si registra l'annullamento dello sforzo al piano mediano. A seconda degli altri valori numerici, si può avere oppure no l'annullamento dello sforzo per un valore di $y$ compreso tra 0 e $H$.

### *1.7 Esempi numerici*

Utilizzando un software di calcolo (MathCad 2000) ed i seguenti valori numerici: $\mu$ = 10000 Pa·s, $v_0$ = 1 m·s$^{-1}$, $H$ = 0.05 m, sono diagrammati nelle figure di sinistra i profili di velocità (eq. 9) e di destra i profili di sforzo (eq. 17) per due diversi valori del gradiente di pressione.

Caso 1. Funzionamento da "pompa", $\frac{d\mathcal{P}}{dz} = 20\,\text{MPa}\cdot\text{m}^{-1}$ positivo:




Caso 2. Funzionamento inverso, $\frac{d\mathcal{P}}{dz} = -20\,\text{MPa}\cdot\text{m}^{-1}$ negativo: