

# Il trasporto di materia

Principi di Ingegneria Chimica Ambientale

# Considerazioni preliminari

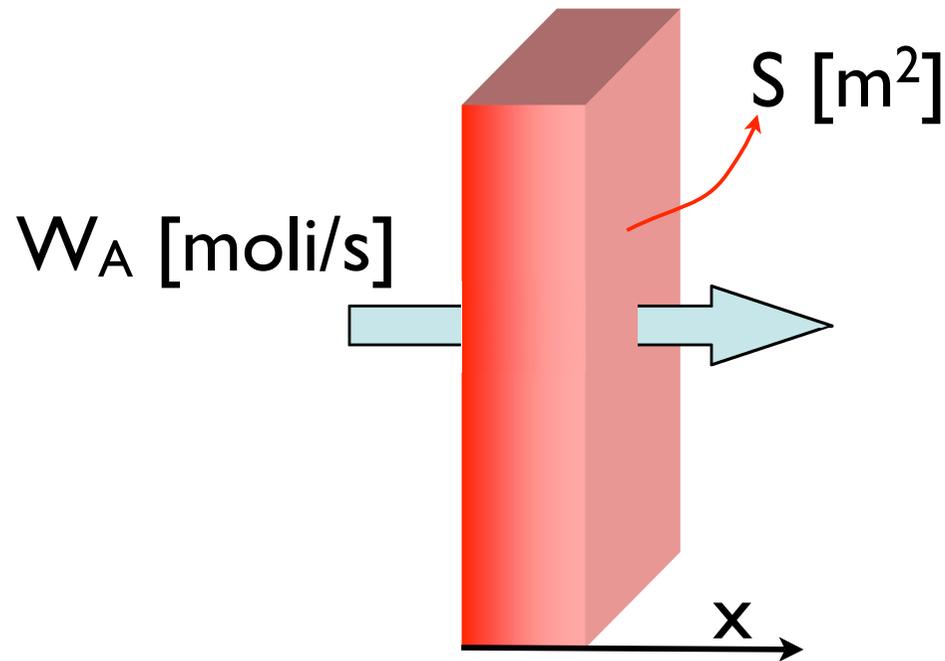
Il nostro studio sarà limitato a:

- miscele binarie
- miscele diluite (ossia in cui la frazione molare di uno dei due componenti sia minore del 10%)
- miscele con concentrazione media costante

# Il flusso di materia

Il flusso di materia  $j_A$ , in una determinata direzione  $x$ , è la quantità di moli della specie chimica “A” ( $W_A$ =portata molare in moli/s) che si propaga nella direzione  $x$  per unità superficie perpendicolare alla direzione  $x$ . Le unità di  $j_A$  sono moli/m<sup>2</sup>s

$$j_A = \frac{W_A}{S}$$

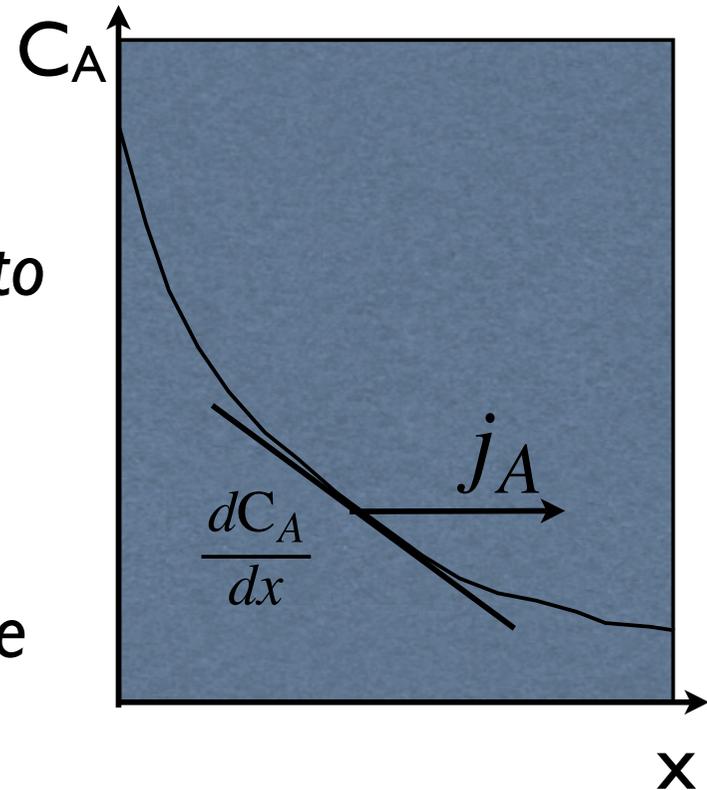


# Il flusso diffusivo di materia

Il flusso  $j_A$  della specie chimica “A” che si propaga per diffusione all’interno di una specie chimica “B” è descritto dall’equazione di Fick: in ogni punto

$$j_A = -D_{AB} \frac{dC_A}{dx}$$

*il flusso molare è proporzionale al gradiente di concentrazione  $dC_A/dx$ , diretto nella direzione delle concentrazioni decrescenti. La costante di proporzionalità fra  $j_A$  e  $dC_A/dx$  è una proprietà della miscela delle due specie e si chiama **diffusività di A in B***



# Il flusso diffusivo di materia

## Lastra piana, stato stazionario

In una lastra piana, a regime, se la specie chimica diffonde nella sola direzione dello spessore, il flusso molare entrante attraverso una superficie è uguale al flusso massico uscente attraverso l'altra superficie

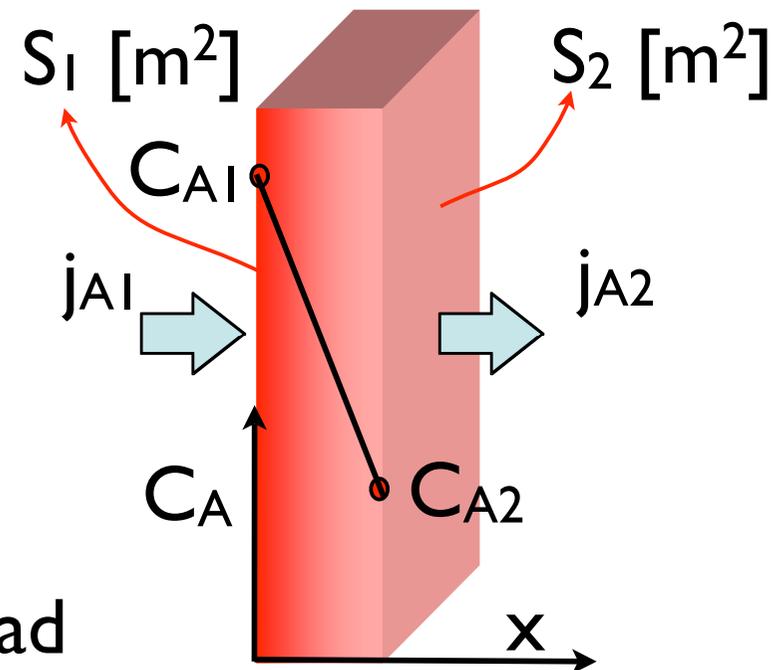
Infatti, dal bilancio di materia, a regime

$$j_{A1} S_1 = j_{A2} S_2$$

e siccome  $S_1 = S_2$

$$j_{A1} = j_{A2}$$

questo risultato si può estendere ad ogni superficie perpendicolare a  $x$



# Il flusso diffusivo di materia

## Lastra piana, stato stazionario

Consideriamo una lastra piana sottile (ossia di spessore  $d$  molto minore delle altre due dimensioni lineari) costituita da una specie chimica "B"

Supponiamo che le due superfici laterali siano mantenute a due concentrazioni diverse della specie chimica "A":  $C_{A1} > C_{A2}$

A regime, siccome  $j_A$  è costante con  $x$ , la concentrazione cambia linearmente con  $x$

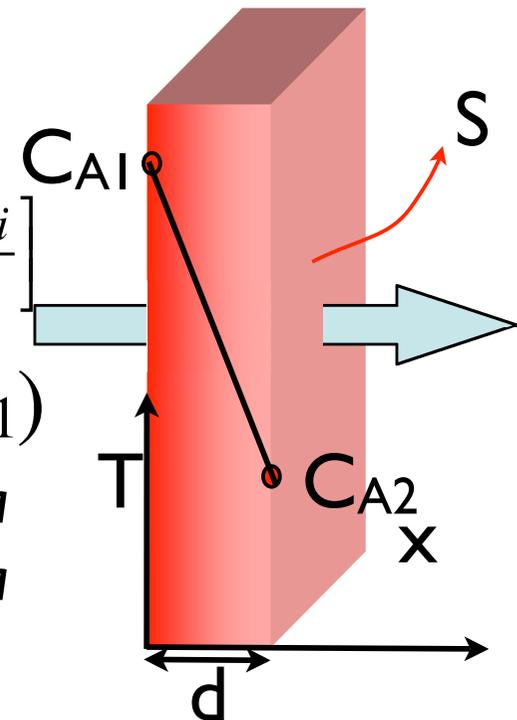
Inoltre, l'integrale dell'equazione di Fick fornisce

$$j_A = -D_{AB} \frac{C_{A2} - C_{A1}}{d}$$

e quindi

$$W_A = -\frac{D_{AB}}{d} S (C_{A2} - C_{A1})$$

*la portata molare è direttamente proporzionale alla differenza di concentrazione, alla superficie e alla diffusività e inversamente proporzionale allo spessore*



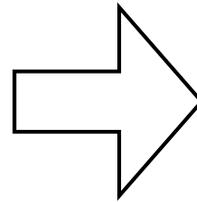
# La diffusività

La diffusività si misura in  $m^2/s$

Per le diffusività in miscele binarie vale la seguente proprietà:

$$D_{AB} = D_{BA}$$

Le diffusività sono più alte nei gas e più basse nei solidi e nei liquidi



Fase	Ordine di grandezza [ $m^2/s$ ]
Gas	$10^{-5} - 10^{-4}$
Liquido	$10^{-11} - 10^{-9}$
Solido	$10^{-16} - 10^{-11}$

Per la diffusività del sistema acqua-aria in fase gas, per  $T$  comprese fra 280K e 450K, vale la seguente relazione:

$$D_{acqua-aria} = 1.87 \cdot 10^{-10} \frac{T^{2.072}}{P}$$

$D$  in  $m^2/s$   
 $T$  in K  
 $P$  in atm

# Il Coefficiente di Scambio di Materia

Consideriamo l'interfaccia fra una fase fluida in movimento ed un'altra fase (ad es. un altro fluido o un solido)

Se esiste una differenza di concentrazione nel fluido fra una posizione lontana dall'interfaccia (che si trova a  $C_{A\infty}$ ) e quella a contatto l'interfaccia (che si trova a  $C_{Ai}$ ), si instaura un flusso molare (convettivo, perchè dovuto al moto del fluido) che attraversa l'interfaccia nella direzione che va dalla concentrazione più alta a quella più bassa. Tale flusso è funzione principalmente della differenza di concentrazione.

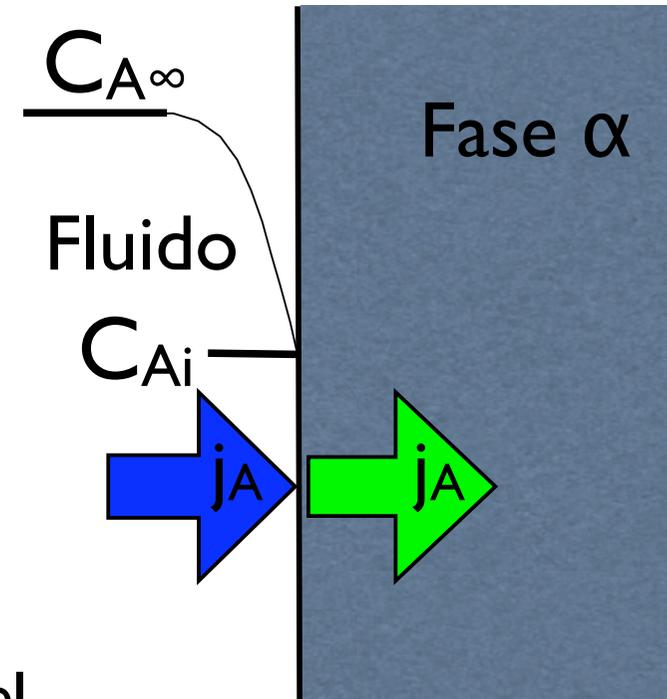
In analogia a quanto fatto con la legge del raffreddamento di Newton si descrive il flusso molare che attraversa l'interfaccia come:

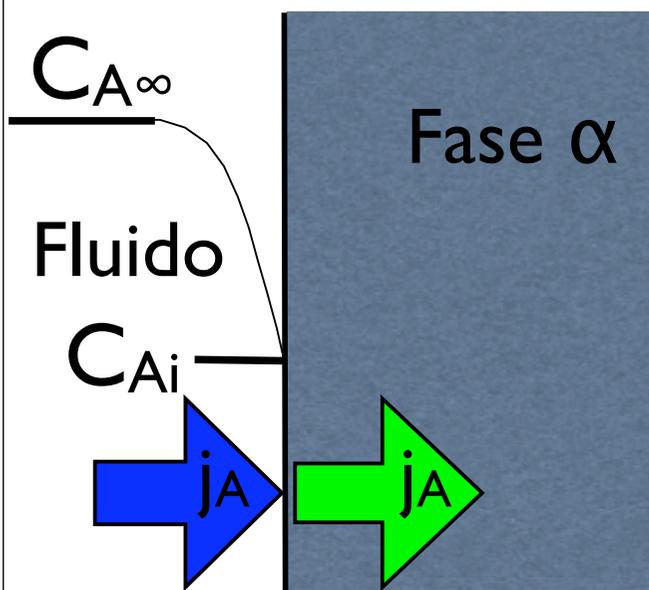
$$j_A = k_c (C_{A\infty} - C_{Ai})$$

che definisce il **coefficiente di scambio di materia  $k_c$** :

$$k_c \equiv j_A / (C_{A\infty} - C_{Ai})$$

le unità di  $k_c$  sono m/s





# Condizioni al contorno

Osserviamo che attraverso un'interfaccia (a differenza della temperatura) la concentrazione non è continua: sull'interfaccia valgono le **correlazioni di equilibrio**.

Ad esempio:

- Interfaccia **solido-gas**:

la concentrazione in fase solida si può calcolare conoscendo la **solubilità**  $S_A$ :  $C_A^{sol} = S_A P_A$  (con  $P_A$  = pressione parziale di A =  $P y_A$ )

- Interfaccia **liquido-gas** con frazione molare in fase liquida  $x_A \rightarrow 0$ :

la frazione molare in fase gas  $y_A$  si può calcolare dalla **legge di Henry**:  $y_A = x_A H_A(T) / P$  (e viceversa  $x_A = y_A P / H_A(T)$ )

- Interfaccia **liquido-gas** con frazione molare in fase liquida  $x_A \rightarrow 1$ :

la frazione molare in fase gas si può calcolare dalla **legge di Raoult**:  $y_A = x_A P_A^{sat}(T) / P \cong P_A^{sat}(T) / P$  (se  $x_A \cong 1$ )

# Umidità relativa

Si definisce **umidità relativa**  $\varphi$  il rapporto

$$\varphi = \frac{P_A}{P_A^{sat}(T)}$$

dove  $P_A$  è la pressione parziale dell'acqua in aria

e  $P_A^{sat}$  è la tensione di vapore dell'acqua (che dipende dalla sola temperatura)

Ad ogni temperatura, quindi, l'umidità relativa fornisce una misura della pressione parziale di acqua nell'aria

Temperatura °C	Tensione di vapore Pa
-40	13
-36	20
-32	31
-28	47
-24	70
-20	104
-16	151
-12	218
-8	310
-4	438
0	611
5	872
10	1'228
15	1'705
20	2'339
25	3'169
30	4'246
35	5'628
40	7'384
50	12'349
100	101'330
200	$1.55 \times 10^6$
300	$8.58 \times 10^6$

# Calcolo del coefficiente di scambio di materia

Tale coefficiente dipende in maniera complessa dalla natura fisica del fluido, dalla sua temperatura, e dal suo stato di moto, oltre che ovviamente dalla diffusività nel fluido della specie che diffonde.

Come per il calore, anche per il trasporto di materia si utilizzano correlazioni basate *numeri adimensionali*.

# Principali numeri adimensionali per il trasporto convettivo

## Numero di Sherwood

THOMAS KILGORE SHERWOOD

1903-1976



Ingegnere statunitense

$$Sh = \frac{k_c L}{\mathcal{D}}$$

Rappresenta il rapporto fra il flusso di materia che si realizza ad un'interfaccia e il flusso puramente diffusivo (molecolare). È l'analogo per la materia del numero di Nusselt

$$Sh = \frac{k_c \Delta c}{\mathcal{D} \frac{\Delta c}{L}}$$

# Principali numeri adimensionali per il trasporto convettivo

## Numero di Schmidt

**ERNST SCHMIDT**

1892-1975



Scienziato tedesco

$$Sc = \frac{\mu}{\rho \mathcal{D}}$$

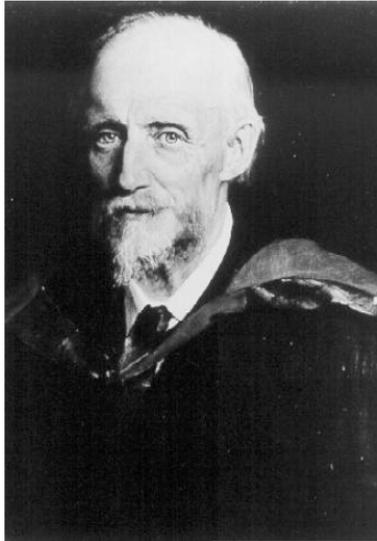
Tiene in conto le proprietà fisiche del fluido, in particolare le proprietà di trasporto. Sostituisce il numero di Prandtl

# Principali numeri adimensionali per il trasporto convettivo

## Numero di Reynolds

OSBOURNE REYNOLDS

1842-1912



Ingegnere e fisico inglese

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$$

Tiene in conto lo stato di moto ( $U$  è la velocità media del fluido,  $L$  è una lunghezza caratteristica del solido).

Si utilizza nella convezione forzata (in cui  $U$  è imposta dall'esterno)

# Principali numeri adimensionali per il trasporto convettivo

FRANZ GRASHOF

1826-1893



Ingegnere tedesco

## Numero di Grashof

$$Gr = \frac{\rho^2 L^3 g \Delta\rho}{\mu^2 \rho}$$

Tiene in conto la convezione naturale attraverso la variazione di densità e la gravità

Se il gas è una miscela binaria di due specie chimiche (A e B) e si comporta come un gas ideale

$$\rho(T, y_A) = \frac{P}{RT} [PM_A y_A + PM_B (1 - y_A)]$$

# Analogia tra trasporto di calore e materia

Nel moto convettivo, ogni volume di fluido porta con sè la propria energia termica (entalpia) e la propria concentrazione di specie chimica e quindi il meccanismo che porta una specie chimica da un fluido ad un'interfaccia è analogo al meccanismo di trasporto termico convettivo

Inoltre, le equazioni di Fourier e di Fick sono formalmente simili

Queste osservazioni sono alla base dell'analogia fra trasporto di calore e di materia, che in termini pratici si usa come segue:

fissata la configurazione di scambio ad un'interfaccia

se il legame funzionale per la convezione forzata di calore è:

$$Nu = a Re^b Pr^c$$

allora il legame funzionale per la convezione forzata di materia è:

$$Sh = a Re^b Sc^c$$

dove a, b e c sono gli stessi coefficienti numerici

# Analogia tra trasporto di calore e materia

Allo stesso modo, fissata la configurazione di scambio all'interfaccia

Se legame funzionale per la convezione naturale di calore è:

$$Nu = d Gr^e Pr^f$$

allora legame funzionale per la convezione naturale di materia è:

$$Sh = d Gr^e Sc^f$$

dove d, e ed f sono gli stessi coefficienti numerici

Per ogni configurazione di trasporto convettivo ad un'interfaccia, se si dispone di una correlazione per lo scambio di calore che lega Nu a Re (o Gr) e Pr, la stessa correlazione si può utilizzare per il trasporto di materia sostituendo Sh a Nu e Sc a Pr

# Analogia di Chilton-Colburn

In mancanza di correlazioni specifiche relative alla configurazione in esame, vale la seguente correlazione generale

questa  
combinazione di numeri  
adimensionali viene chiamata  
Fattore di Colburn per il  
calore

$$\frac{Nu}{Re Pr^{\frac{1}{3}}} = \frac{Sh}{Re Sc^{\frac{1}{3}}}$$

questa  
combinazione di numeri  
adimensionali viene chiamata  
Fattore di Colburn per la  
materia

che significa dire

$$\frac{k_c}{h} = \left( \frac{D}{k} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{(\rho C_p)^{\frac{1}{3}}}$$

# Trasporto simultaneo di calore e materia raffreddamento per evaporazione

Se un liquido lascia un corpo a causa di un trasporto convettivo di materia, l'evaporazione sottrae calore al corpo stesso.

Supponiamo di avere un corpo ricoperto da un sottile strato di acqua, investito da una corrente di aria. La quantità di calore sottratta al corpo nell'unità di tempo vale

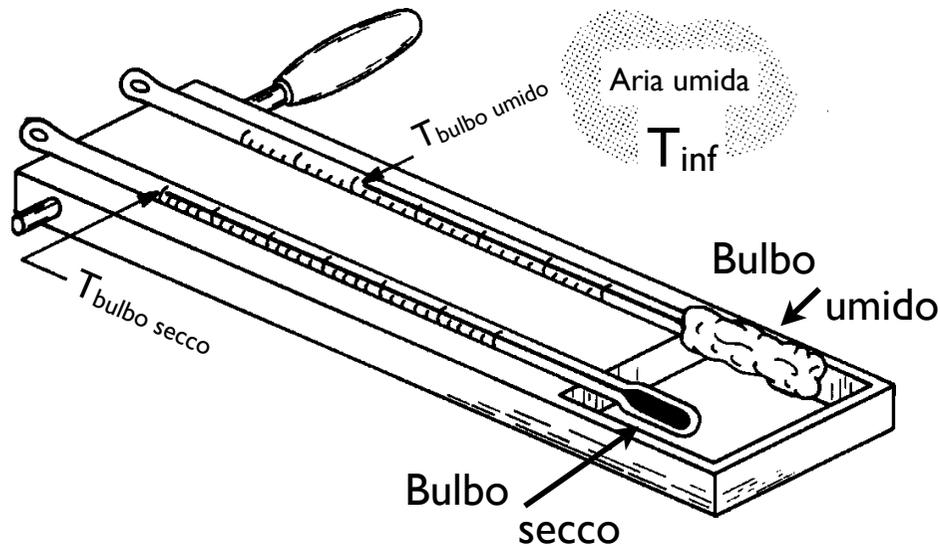
$$W_A \Delta H_A$$

dove  $W_A$  è la portata molare dell'acqua che lascia la superficie e

$\Delta H_A$  è il calore latente di evaporazione (per unità di moli) dell'acqua alla temperatura della superficie stessa

# Trasporto simultaneo di calore e materia

## temperatura di bulbo umido



nel sistema in figura, due termometri vengono immersi in una corrente di aria umida

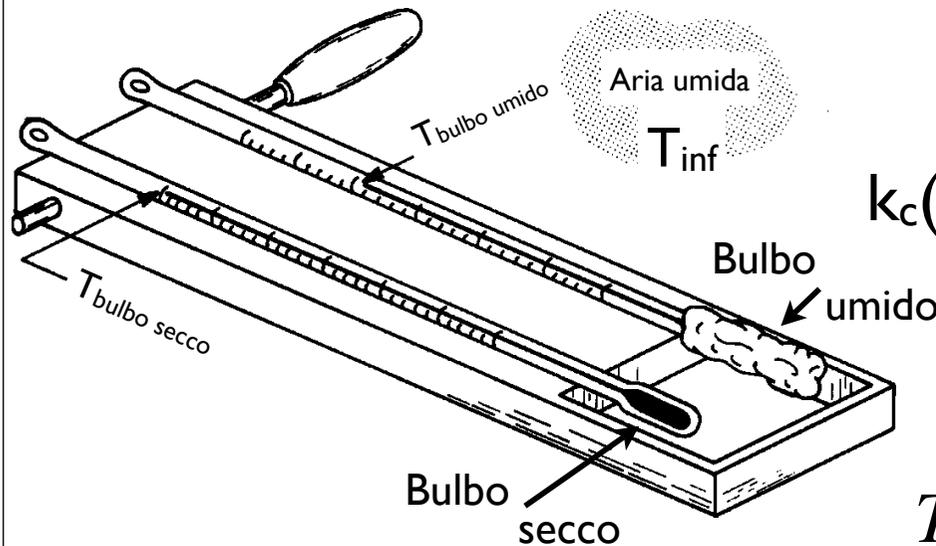
Il bilancio di energia sul termometro secco fornisce

$$T_{\text{bulbo secco}} = T_{\text{inf}}$$

Ossia il termometro secco legge la temperatura dell'aria che lo investe

# Trasporto simultaneo di calore e materia

## temperatura di bulbo umido



Il bilancio di energia sul termometro bagnato fornisce

$$k_c(C_{Ainf}-C_{Ai})\Delta H_{ev}+h(T_{inf}-T_{bulbo\ umido})=0$$

e quindi

$$T_{bulbo\ umido}=T_{inf}-\frac{k_c(C_{Ai}-C_{Ainf})\Delta H_{ev}}{h}$$

dove  $C_{Ai}$  è la concentrazione di acqua nell'aria all'interfaccia con il bulbo umido (concentrazione di saturazione a  $T_{bulbo\ umido}$ )

$C_{Ainf}$  è la concentrazione di acqua nell'aria che investe il termometro

$\Delta H_{ev}$  è il calore latente di evaporazione dell'acqua a  $T_{bulbo\ umido}$

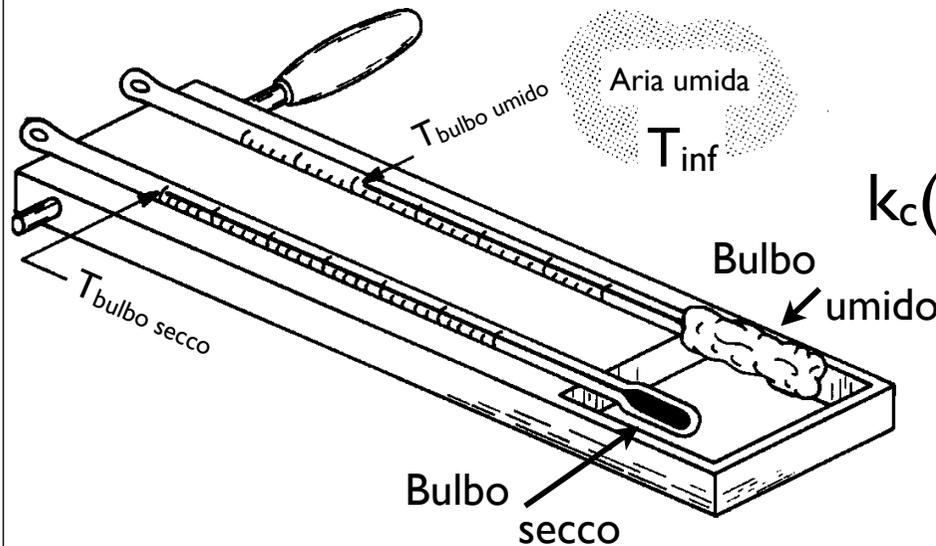
$k_c$  è il coefficiente di scambio di materia

$h$  è il coefficiente di scambio termico

Il termometro umido legge una temperatura più bassa

# Trasporto simultaneo di calore e materia

## temperatura di bulbo umido



Il bilancio di energia sul termometro bagnato fornisce

$$k_c(C_{Ainf}-C_{Ai})\Delta H_{ev}+h(T_{inf}-T_{bulbo\ umido})=0$$

Il bilancio di energia sul termometro secco fornisce

$$T_{bulbo\ secco}=T_{inf}$$

e quindi

$$C_{Ainf}=C_{Ai}-\frac{h(T_{bulbo\ secco}-T_{bulbo\ umido})}{k_c\Delta H_{ev}}$$

Il termometro a bulbo umido e bulbo secco consente di valutare l'umidità dell'aria