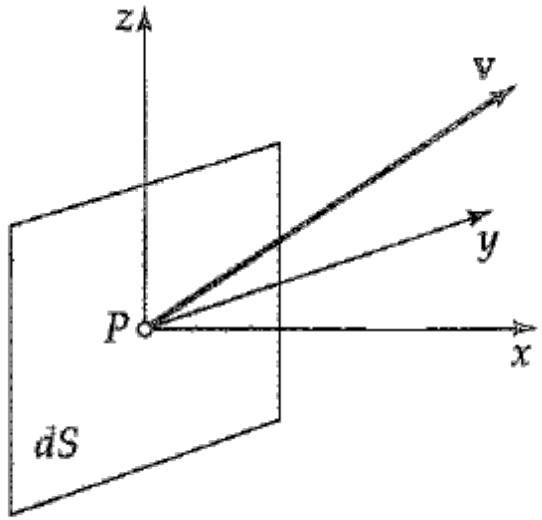
Equazione dell'energia

Fenomeni di Trasporto

Trasporto convettivo di energia



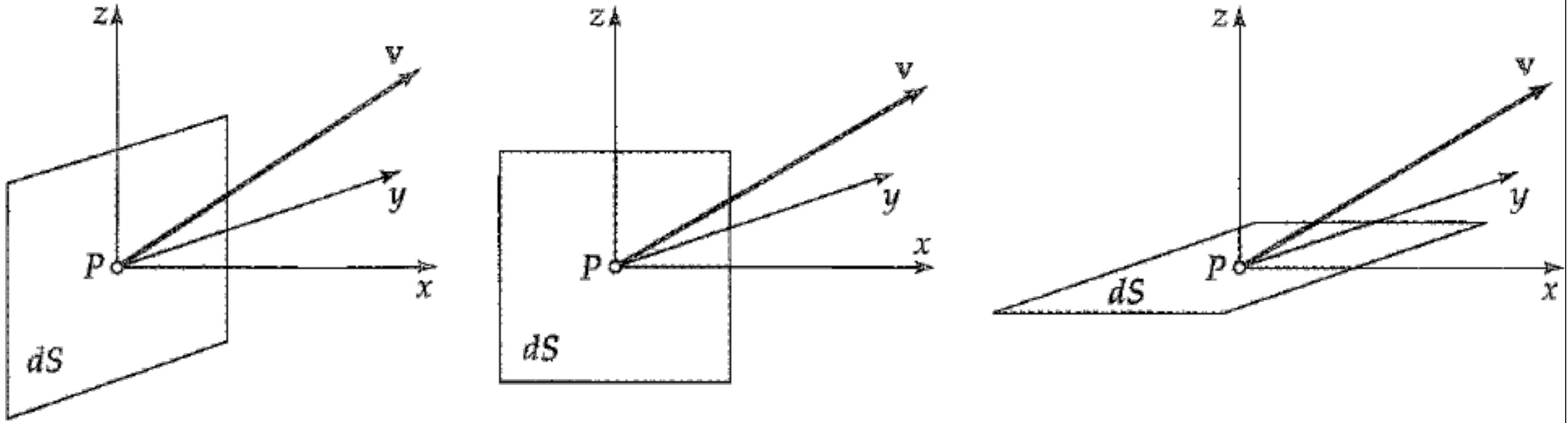
La portata volumetrica che attraversa l'elemento di superficie dS perpendicolare all'asse x è $v_x dS$

La portata di energia che attraversa l'elemento di superficie dS perp. all'asse x per effetto del moto convettivo è $(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U})v_x dS$

con $\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ energia cinetica per unità di volume

$\rho\hat{U}$ energia interna per unità di volume

Trasporto convettivo di energia



$$(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U})\boldsymbol{\delta}_x v_x + (\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U})\boldsymbol{\delta}_y v_y + (\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U})\boldsymbol{\delta}_z v_z = (\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U})\mathbf{v}$$

è il flusso convettivo di energia in un punto

Il flusso di energia che attraversa una sezione di normale $\mathbf{n}$ è dato da

$$(\mathbf{n} \cdot (\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U})\mathbf{v})$$

Nota: $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$

Il *flusso di lavoro*

$dW = (\mathbb{F} \cdot d\mathbf{r})$ è il lavoro di una forza

$dW/dt = (\mathbb{F} \cdot \mathbf{v})$ è la velocità di variazione del lavoro: potenza

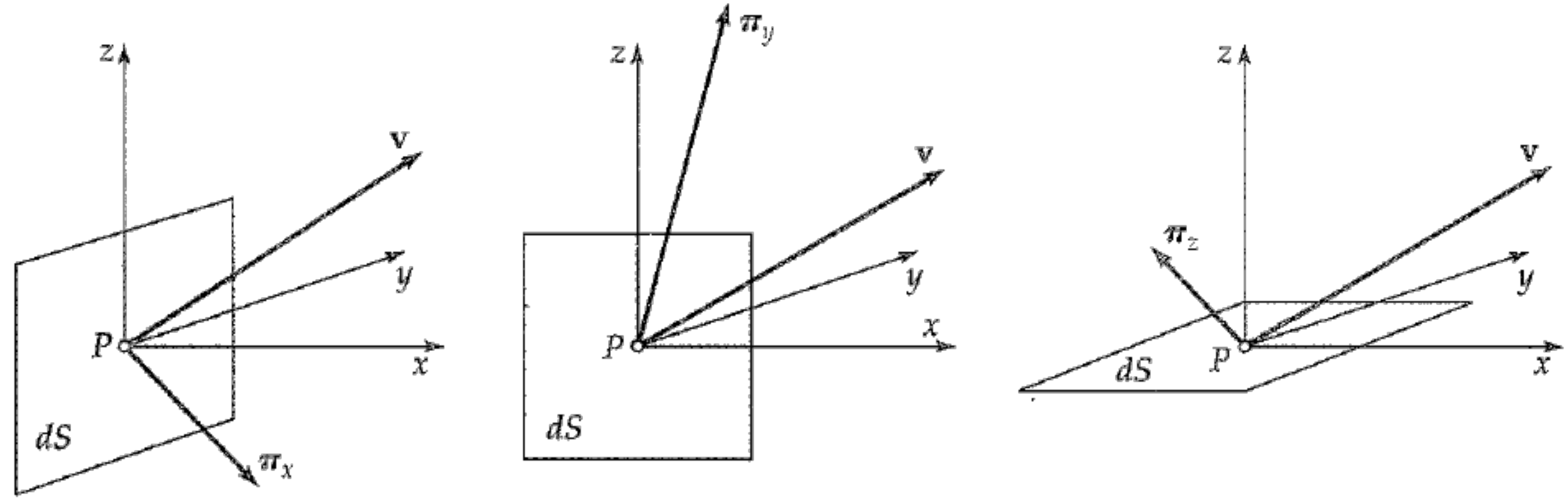
Richiamo sugli sforzi agenti in un fluido

Π_{xy} è lo sforzo esercitato nella direzione y, su una superficie di normale entrante x. E' uno scalare

$\Pi_x = (\Pi_{xx}, \Pi_{xy}, \Pi_{xz})$ è lo sforzo esercitato su una superficie di normale entrante x. E' un vettore

Superficie di normale	Sforzo agente sulla sup. o anche flusso di quantità di moto che attraversa la superficie	Componenti dello sforzo che agiscono sull'area o anche componenti del flusso di quantità di moto che attraversano l'area: componente x	componente y	componente z
x	$\boldsymbol{\pi}_x = p\boldsymbol{\delta}_x + \boldsymbol{\tau}_x$	$\pi_{xx} = p + \tau_{xx}$	$\pi_{xy} = \tau_{xy}$	$\pi_{xz} = \tau_{xz}$
y	$\boldsymbol{\pi}_y = p\boldsymbol{\delta}_y + \boldsymbol{\tau}_y$	$\pi_{yx} = \tau_{yx}$	$\pi_{yy} = p + \tau_{yy}$	$\pi_{yz} = \tau_{yz}$
z	$\boldsymbol{\pi}_z = p\boldsymbol{\delta}_z + \boldsymbol{\tau}_z$	$\pi_{zx} = \tau_{zx}$	$\pi_{zy} = \tau_{zy}$	$\pi_{zz} = p + \tau_{zz}$

Il *flusso di lavoro*



$dW = (\mathbb{F} \cdot d\mathbf{r})$ è il lavoro di una forza

$dW/dt = (\mathbb{F} \cdot \mathbf{v})$ è la velocità di variazione del lavoro: potenza

	flusso di energia che attraversa l'elemento di superficie dS perp. all'asse
$(\boldsymbol{\pi}_x \cdot \mathbf{v}) = \pi_{xx}v_x + \pi_{xy}v_y + \pi_{xz}v_z \equiv [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}]_x$	x
$(\boldsymbol{\pi}_y \cdot \mathbf{v}) = \pi_{yx}v_x + \pi_{yy}v_y + \pi_{yz}v_z \equiv [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}]_y$	y
$(\boldsymbol{\pi}_z \cdot \mathbf{v}) = \pi_{zx}v_x + \pi_{zy}v_y + \pi_{zz}v_z \equiv [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}]_z$	z

Flusso combinato di energia

$$\mathbf{e} = (\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U})\mathbf{v} + [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}] + \mathbf{q}$$

Flusso convettivo di energia

Potenza esercitata delle forze esterne

Flusso di calore

L'equazione di bilancio di energia

$$\Delta x\ \Delta y\ \Delta z\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho \hat{U}\right)$$

$$\rho\ \Delta x\ \Delta y\ \Delta z(v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z)$$

$$\begin{Bmatrix}\text{Accumulo} \\ \text{di energia} \\ \text{cinetica e} \\ \text{interna}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\text{Portata netta} \\ \text{(entrante – uscente)} \\ \text{di energia per} \\ \text{convezione}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\text{Portata netta} \\ \text{(entrante – uscente)} \\ \text{di energia per} \\ \text{conduzione}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\text{Lavoro svolto} \\ \text{dalle forze} \\ \text{di superficie} \\ \text{(sforzi)}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\text{Lavoro svolto} \\ \text{dalle forze} \\ \text{di volume} \\ \text{(es. gravità)}\end{Bmatrix}$$

$$\Delta y\ \Delta z(e_x|_x - e_x|_{x+\Delta x}) + \Delta x\ \Delta z(e_y|_y - e_y|_{y+\Delta y}) + \Delta x\ \Delta y(e_z|_z - e_z|_{z+\Delta z})$$

L'equazione di bilancio di energia

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho \hat{U}\right) = -\left(\frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} + \frac{\partial e_z}{\partial z}\right) + \rho(v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho \hat{U}\right) = -(\nabla \cdot \mathbf{e}) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$$

$$\mathbf{e} = \left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho \hat{U}\right)\mathbf{v} + [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}] + \mathbf{q}$$

Nota: $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$

L'equazione di bilancio di energia

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho \hat{U}\right) = -\left(\nabla \cdot \left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho \hat{U}\right)\mathbf{v}\right) - (\nabla \cdot \mathbf{q})$$

Accumulo di energia cinetica ed interna

Velocità di ingresso dell'energia per trasporto convettivo

Velocità di ingresso dell'energia per conduzione

$$- (\nabla \cdot p\mathbf{v}) \qquad - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) \qquad + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$$

Potenza svolta dalle forze di pressione

Potenza svolta dalle forze viscose

Potenza svolta dalla forza di gravità

L'equazione di bilancio di energia
considerazioni sull'energia potenziale gravitazionale

$$\mathbf{g} = -\nabla\hat{\Phi} \qquad\qquad \hat{\Phi} = gh$$

h è un vettore diretto verso l'alto

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}) &= -(\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\hat{\Phi})\\ &= -(\nabla\cdot\rho\mathbf{v}\hat{\Phi}) + \hat{\Phi}(\nabla\cdot\rho\mathbf{v})\\ &= -(\nabla\cdot\rho\mathbf{v}\hat{\Phi}) - \hat{\Phi}\frac{\partial\rho}{\partial t}\\ &= -(\nabla\cdot\rho\mathbf{v}\hat{\Phi}) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho\hat{\Phi})\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} = -(\nabla\cdot\rho\mathbf{v})\right)$$

L'equazione di bilancio di energia

Considerando il termine di gravità come energia potenziale gravitazionale:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U} + \rho\hat{\Phi}\right) = -\left(\nabla \cdot \left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U} + \rho\hat{\Phi}\right)\mathbf{v}\right) - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot p\mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}])$$

Considerando il termine di gravità come lavoro delle forze di gravità:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right) = -\left(\nabla \cdot \left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right)\mathbf{v}\right) - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot p\mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$$

L'equazione di bilancio di energia

forma euleriana

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right) = -\left(\nabla \cdot \left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right)\mathbf{v}\right) - (\nabla \cdot \mathbf{q})$$

Accumulo di energia cinetica ed interna

Velocità di ingresso dell'energia per trasporto convettivo

Velocità di ingresso dell'energia per conduzione

$$- (\nabla \cdot p\mathbf{v}) \qquad - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) \qquad + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$$

Potenza svolta dalle forze di pressione

Potenza svolta dalle forze viscose

Potenza svolta dalla forza di gravità

L'equazione di bilancio di energia

forma lagrangiana

$$\rho \; \frac{D}{Dt} \left(\tfrac{1}{2}v^2 + \hat{U}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right) + \left(\nabla \cdot \left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right)\mathbf{v}\right)$$

Nota: $$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{c})$$

L'equazione di bilancio di energia
forma lagrangiana

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\tfrac{1}{2}v^2 + \hat{U}\right) = -(\nabla \cdot \mathbf{q})$$

$$-(\nabla \cdot p\mathbf{v}) \qquad -(\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) \qquad +\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$$

L'equazione dell'energia meccanica

Equazione del moto

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g}$$

Moltiplicando scalarmente per ***v***

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla p) - (\mathbf{v} \cdot [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$$

L'equazione dell'energia meccanica

Variazione di energia cinetica

Potenza convertita in energia interna (lavoro di volume) in maniera reversibile

Potenza convertita in energia interna (in maniera irreversibile, come sarà chiaro in seguito)

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) = -(\nabla \cdot p\mathbf{v}) - p(-\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) - (-\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$$

Potenza svolta dalle forze di pressione

Potenza svolta dalle forze di superficie

Potenza svolta dalle forze di gravità

Oss.: $-\nabla \cdot \mathbf{v} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{D}{Dt}\rho = -\dfrac{1}{\hat{V}}\dfrac{D}{Dt}\hat{V}$

L'equazione dell'energia
in termini di energia interna

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\tfrac{1}{2}v^2 + \hat{U}\right) = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot p\mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$$

$-$ (meno)

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) = -(\nabla \cdot p\mathbf{v}) - p(-\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) - (-\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$$

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v})$$

L'equazione dell'energia

in termini di entalpia

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau}:\nabla \mathbf{v})$$

$$\hat{U} = \hat{H} - p\hat{V} = \hat{H} - (p/\rho)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\frac{D}{Dt}\rho = -\frac{1}{\hat{V}}\frac{D}{Dt}\hat{V}$$

$$\rho \frac{D\hat{H}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau}:\nabla \mathbf{v}) + \frac{Dp}{Dt}$$

L'equazione dell'energia
in termini di temperatura

$$\rho \frac{D\hat{H}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau}:\nabla \mathbf{v}) + \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho \frac{D\hat{H}}{Dt} = \rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} + \rho \left[\hat{V} - T \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial T} \right)_p \right] \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau}:\nabla \mathbf{v}) - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt}$$

L'equazione dell'energia
casi particolari

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau}:\nabla \mathbf{v}) - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_p \frac{Dp}{Dt}$$

Legge di Fourier (con conducibilità costante)

$$-(\nabla \cdot \mathbf{q}) = (\nabla \cdot k\nabla T) = k\nabla^2 T$$

L'equazione dell'energia
casi particolari

$$\rho\hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v}) - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_p \frac{Dp}{Dt}$$

Legge di Newton generalizzata: $\boldsymbol{\tau} = -\mu(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\dagger}) + \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})\boldsymbol{\delta}$

$$(-\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mu \sum_i \sum_j \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{v})\delta_{ij}\right]^2 = \mu\Phi_v$$

$$\Phi_v = 2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]^2$$

L'equazione dell'energia
gas ideale, senza dissipazione

$$\rho\hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_p \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho\hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho\hat{C}_V \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T - p(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

L'equazione dell'energia
fluido incomprimibile, senza dissipazione

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_p \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T$$

L'equazione dell'energia
trasporto di energia in un solido

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_p \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T$$

L'equazione dell'entropia

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\hat{S} = -(\nabla \cdot \rho\hat{S}\mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{s}) + g_S$$

$$\rho\,\frac{D\hat{S}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{s}) + g_S$$

Entropia generata
nell'unità di tempo

L'equazione dell'entropia

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau}:\nabla \mathbf{v})$$

$$d\hat{U} = Td\hat{S} - pd\hat{V}$$

$$\rho \frac{D\hat{S}}{Dt} = -\frac{1}{T}(\nabla \cdot \mathbf{q}) - \frac{1}{T}(\boldsymbol{\tau}:\nabla \mathbf{v})$$

L'equazione dell'entropia

$$\rho \frac{D\hat{S}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{s}) + g_S$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{q}/T$$

$$\rho \frac{D\hat{S}}{Dt} = -\frac{1}{T}(\nabla \cdot \mathbf{q}) + \frac{1}{T^2}(\mathbf{q} \cdot \nabla T) + g_S$$

L'equazione dell'entropia

$$\rho \frac{D\hat{S}}{Dt} = -\frac{1}{T}(\nabla \cdot \mathbf{q}) + \frac{1}{T^2}(\mathbf{q} \cdot \nabla T) + g_S$$

$$\rho \frac{D\hat{S}}{Dt} = -\frac{1}{T}(\nabla \cdot \mathbf{q}) - \frac{1}{T}(\boldsymbol{\tau}:\nabla \mathbf{v})$$

$$g_S = \underbrace{\boxed{-\frac{1}{T^2}(\mathbf{q} \cdot \nabla T)}}_{\text{Generazione di entropia dovuta a gradienti termici}} - \underbrace{\boxed{\frac{1}{T}(\boldsymbol{\tau}:\nabla \mathbf{v})}}_{\text{Gen. di entropia dovuta a dissipazione meccanica}}$$

L'equazione dell'entropia

$$g_S = \boxed{-\frac{1}{T^2}(\mathbf{q} \cdot \nabla T)} - \boxed{\frac{1}{T}(\boldsymbol{\tau}:\nabla \mathbf{v})}$$

q deve essere proporzionale a $-\nabla T$

τ deve essere proporzionale a $-\nabla v$