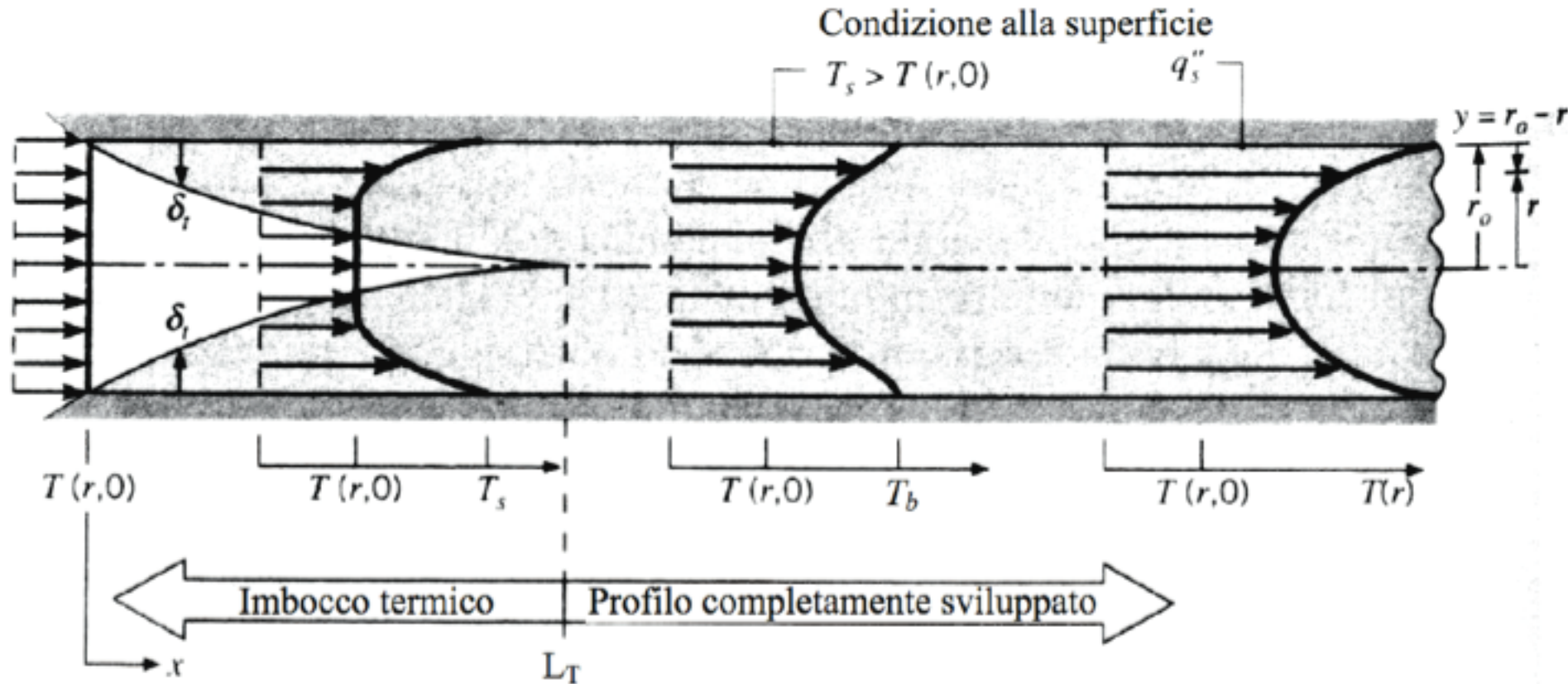


Trasporto di energia per moto in condotti

Fenomeni di Trasporto

Profilo di temperatura completamente sviluppato

Sviluppo del profilo termico in un condotto riscaldato:



Il profilo termico non si stabilizza mai (nel caso di $T_s = \text{cost.}$ si stabilizza solo quando diventa piatto, ossia a lunghezze infinite)

Profilo di temperatura completamente sviluppato

Possiamo definire una temperatura adimensionale:

$$\Theta = \frac{T - T_s}{T_b - T_s} \quad \text{dove} \quad T_b = \frac{\int_A \rho v_z C_p T \, dA}{\dot{m} C_p}$$

è la temperatura di mescolamento (o di *bulk*)

Definiamo il profilo termico *completamente sviluppato* quando:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0$$

Profilo di temperatura completamente sviluppato

Definiamo il profilo termico *completamente sviluppato* quando:

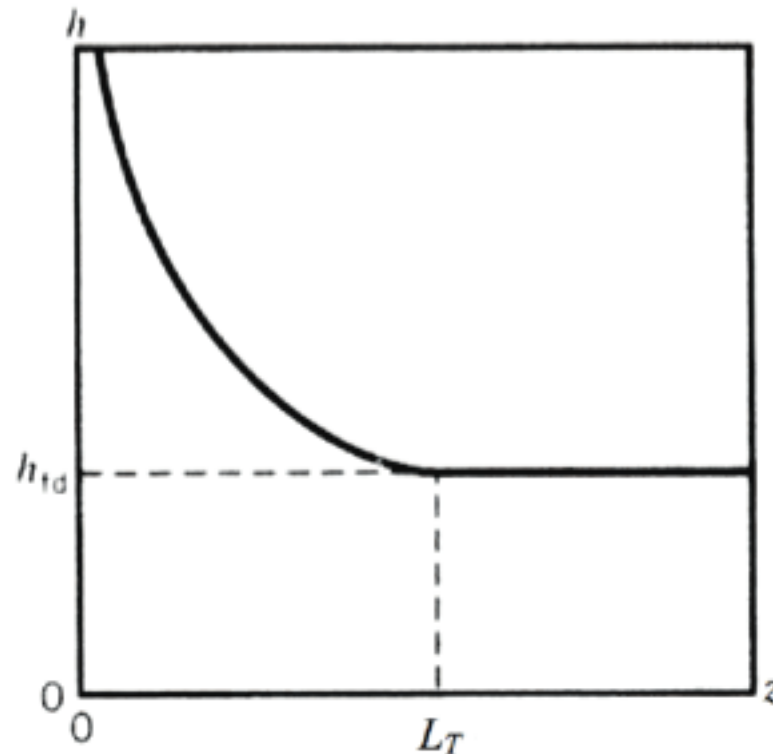
$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 \quad \text{Vuol dire che, essendo } T_s \text{ e } T_b \text{ indipendenti da } r$$
$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{T_s - T}{T_s - T_b} \right) \Big|_{r=r_o} = \frac{-\partial T / \partial r \Big|_{r=r_o}}{T_s - T_b} \neq f(z)$$

$$\left. \begin{aligned} q_s'' &= -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_o} \\ q_s'' &= h(T_s - T_b) \end{aligned} \right\} \frac{h}{k} \neq f(z)$$

Profilo di temperatura completamente sviluppato

$$\frac{h}{k} \neq f(z)$$

Quando il profilo termico è completamente sviluppato, il coefficiente di scambio termico è costante



Profilo di temperatura completamente sviluppato

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 \quad \text{vuol dire che}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{L_T} = \frac{dT_s}{dz} \Big|_{L_T} - \frac{(T_s - T)}{(T_s - T_b)} \frac{dT_s}{dz} \Big|_{L_T} + \frac{(T_s - T)}{(T_s - T_b)} \frac{dT_b}{dz} \Big|_{L_T}$$

se il flusso alla parete è costante

$$q_s'' = h(T_s - T_b) \quad \text{essendo } h = \text{cost} \quad \frac{dT_s}{dz} \Big|_{L_T} = \frac{dT_b}{dz} \Big|_{L_T}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{L_T} = \frac{dT_b}{dz} \Big|_{L_T}$$

Il profilo termico cambia in maniera omogenea seguendo il comportamento di T_b

Oss.: per flusso alla parete costante $T_b(z) = T_b(z=0) + \frac{q_s'' \pi D}{\dot{m} C_p} z$

Profilo di temperatura completamente sviluppato

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 \quad \text{vuol dire che}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{L_T} = \left. \frac{dT_s}{dz} \right|_{L_T} - \frac{(T_s - T)}{(T_s - T_b)} \left. \frac{dT_s}{dz} \right|_{L_T} + \frac{(T_s - T)}{(T_s - T_b)} \left. \frac{dT_b}{dz} \right|_{L_T}$$

se la temperatura di parete è costante

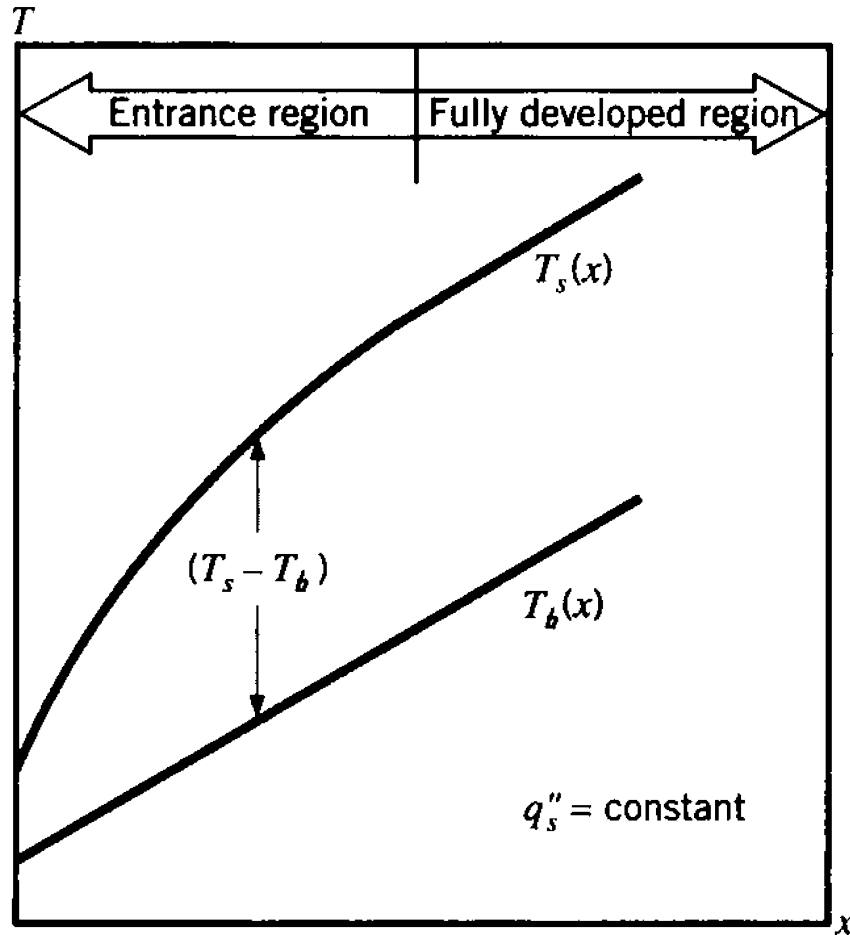
$$\left. \frac{\partial \ln(T - T_s)}{\partial z} \right|_{L_T} = \left. \frac{d \ln(T_b - T_s)}{dz} \right|_{L_T}$$

Oss.: per T_s alla parete costante

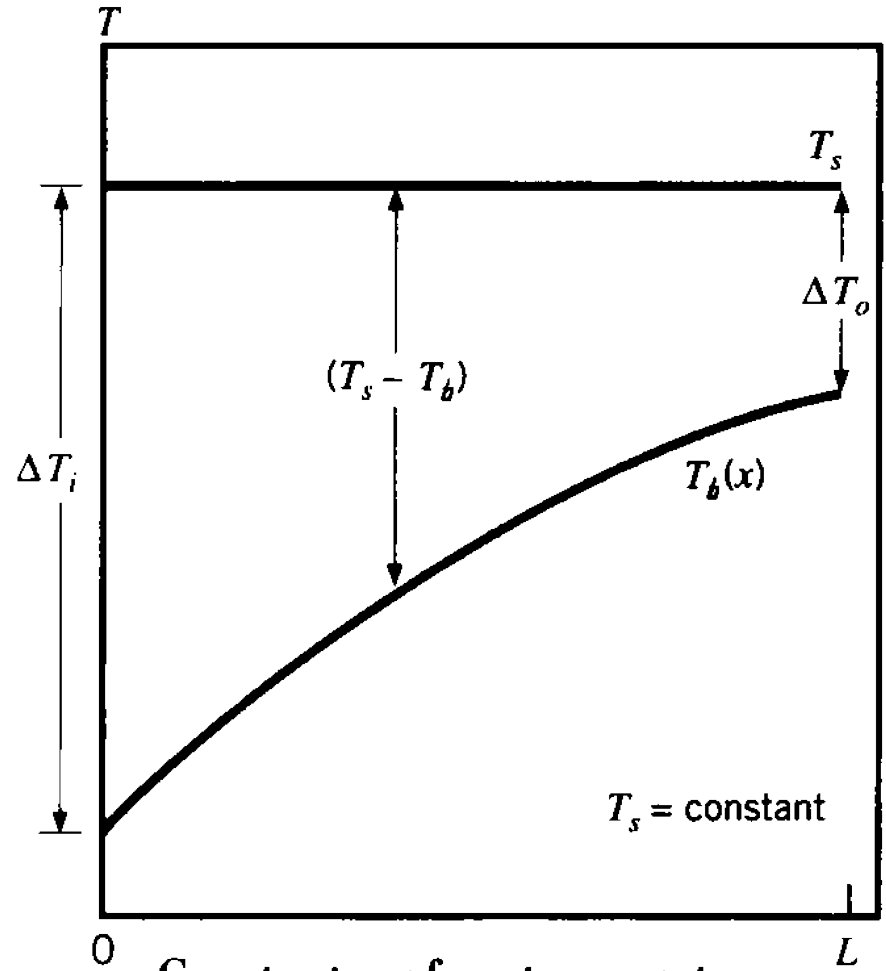
$$\left. \frac{d \ln(T_b - T_s)}{dz} \right|_{L_T} = -\frac{\pi D}{\dot{m} C_p} h$$

Profilo di temperatura completamente sviluppato

Axial temperature variations for heat transfer in a tube



Constant surface heat flux



Constant surface temperature.

Profilo termico completamente sviluppato

caso per flusso costante imposto alla parete

Considerando moto unidirezionale, completamente sviluppato, e trascurando la generazione viscosa e la conduzione assiale:

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Per flusso costante, e per profilo termico sviluppato:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{L_T} = \left. \frac{dT_b}{dz} \right|_{L_T}$$

L'equazione dell'energia si può scrivere (fluido Newtoniano):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{2v}{\alpha} \left(\frac{dT_b}{dz} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad q_s'' = \text{costante}$$

Profilo termico completamente sviluppato

caso per flusso costante imposto alla parete

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{2\nu}{\alpha} \left(\frac{dT_b}{dz} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad q_s'' = \text{costante}$$

Integrando lungo r

$$T(r, z) = \frac{2\nu}{\alpha} \left(\frac{dT_b}{dz} \right) \left[\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16R^2} \right] + C_1 \ln r + C_2$$

con le due condizioni al contorno: $T(R, z) = T_s(z)$ e $T(0, z) = \text{finita}$

Si ottiene:

$$T(r, z) = T_s(z) - \frac{2\nu R^2}{\alpha} \left(\frac{dT_b}{dz} \right) \left[\frac{3}{16} + \frac{1}{16} \left(\frac{r}{R} \right)^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Profilo termico completamente sviluppato

caso per flusso costante imposto alla parete

$$T(r, z) = T_s(z) - \frac{2\nu R^2}{\alpha} \left(\frac{dT_b}{dz} \right) \left[\frac{3}{16} + \frac{1}{16} \left(\frac{r}{R} \right)^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Calcolando la temperatura media $T_b = \frac{\int_A \rho v_z C_p T \, dA}{\dot{m} C_p}$

e considerando che $\frac{\partial T_b}{\partial z} = \frac{q_s'' \pi D}{\dot{m} C_p}$

si ottiene $T_b(z) - T_s(z) = -\frac{11}{48} \frac{q_s'' D}{k}$

Profilo termico completamente sviluppato

caso per flusso costante imposto alla parete

Dalla definizione di coefficiente di scambio, si ottiene

$$h = \frac{48}{11} \left(\frac{k}{D} \right)$$

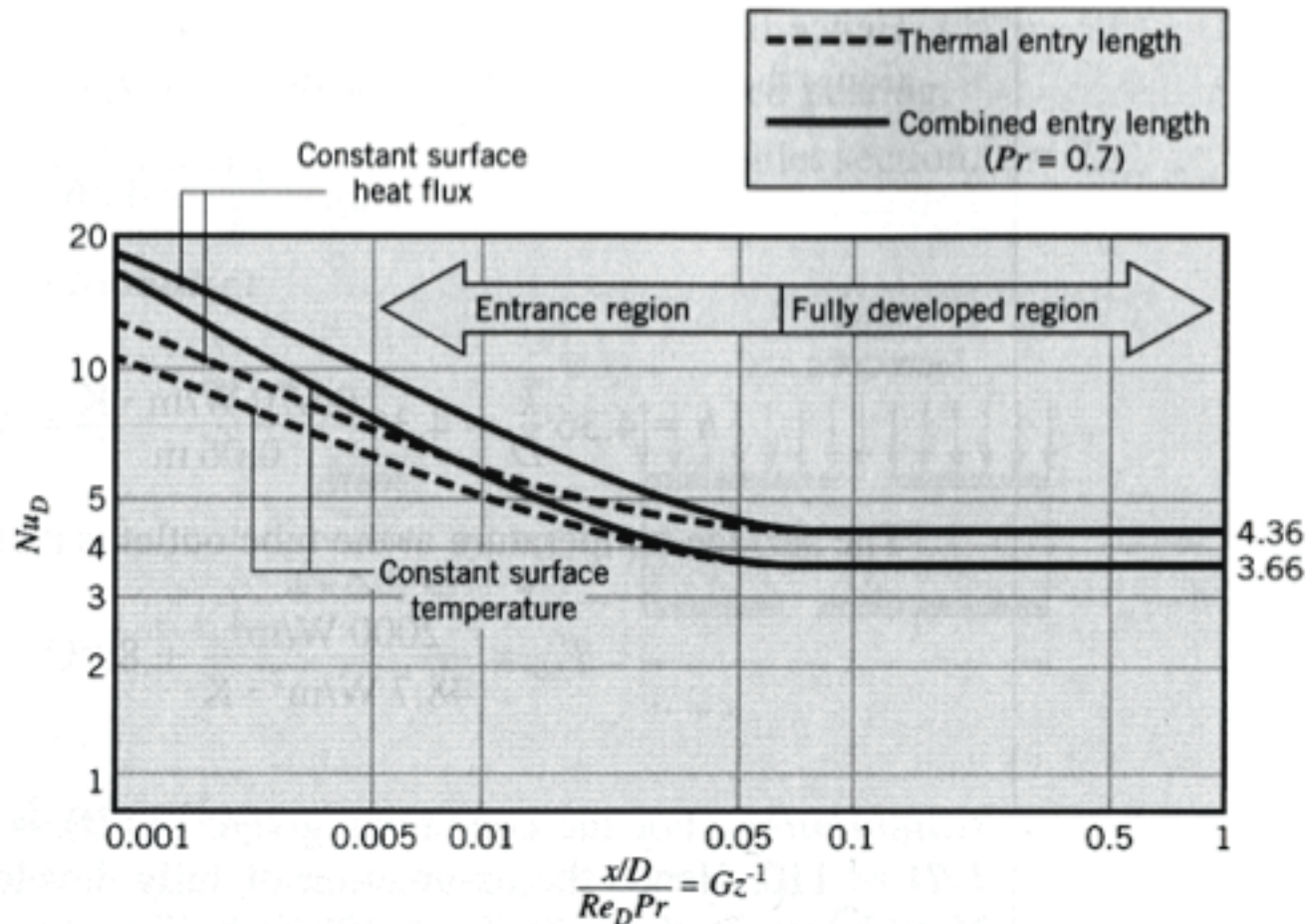
$$Nu_D \equiv \frac{hD}{k} = 4.36 \quad q_s'' = \text{costante}$$

Profilo termico completamente sviluppato caso per temperatura costante alla parete

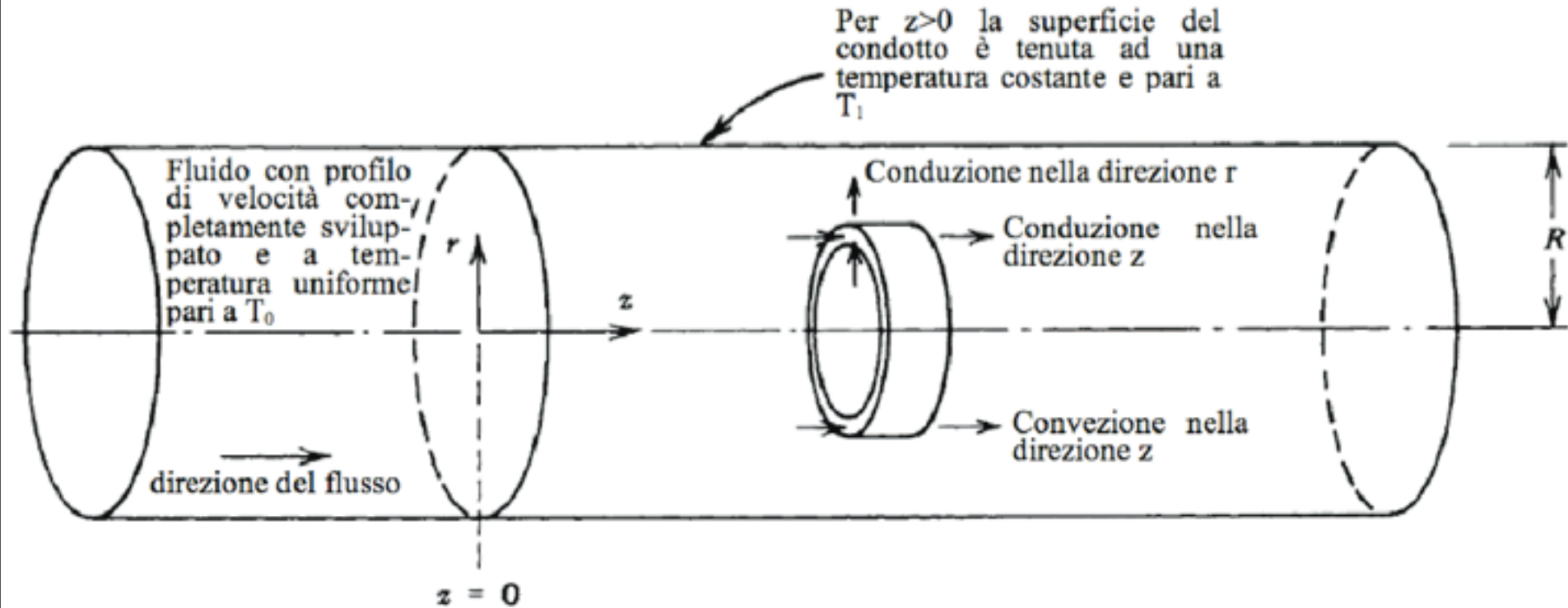
In questo caso, la soluzione è molto più complessa, e il risultato è

$$Nu_D = 3.66$$

$$T_s = \text{costante}$$



Evoluzione del profilo termico nella zona di imbocco



Il profilo di velocità è (fluido a legge di potenza con $s=1/n$)

$$v_z = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{s+1} \right] = \langle v_z \rangle \left(\frac{s+3}{s+1} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{s+1} \right]$$

Evoluzione del profilo termico nella zona di imbocco

Eq. dell'energia

$$\rho \hat{C}_p \langle v_z \rangle \left(\frac{s+3}{s+1} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{s+1} \right] \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

Cond. al contorno

a	$r = 0$	$T = \text{finita}$
a	$r = R$	$T = T_1$
a	$z = 0$	$T \rightarrow T_0$
a	$z \rightarrow +\infty$	$T \rightarrow T_1$

Evoluzione del profilo termico nella zona di imbocco

Eq. dell'energia

$$\rho \hat{C}_p \langle v_z \rangle \left(\frac{s+3}{s+1} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{s+1} \right] \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

Variabili adimensionali $\Theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$; $\xi = \frac{r}{R}$; $\zeta' = \frac{\alpha z}{\langle v_z \rangle R^2}$

$$\phi(\xi) = \frac{v_z}{\langle v_z \rangle} = \frac{v_z}{Q/\pi R^2} = \left(\frac{s+3}{s+1} \right) (1 - \xi^{s+1})$$

Eq. adimensionalizzata dell'energia ($\text{Pe} = \frac{\rho \hat{C}_p \langle v_z \rangle R}{k}$)

$$\phi(\xi) \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta'} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta'^2}$$

Evoluzione del profilo termico nella zona di imbocco

Eq. adimensionalizzata dell'energia

$$\phi(\xi) \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta'} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta'^2}$$

Per alti numeri di Peclet, il termine sottolineato si può trascurare

	a	$\zeta' = 0$	$\Theta = 1$
Cond. al contorno	a	$\xi = 1$	$\Theta = 0$
	a	$\xi = 0$	$\Theta = \text{finita}$

Evoluzione del profilo termico nella zona di imbocco

Eq. adimensionalizzata dell'energia

$$\phi(\xi) \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta'} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right)$$

Se si suppone che il trasporto di calore coinvolga uno strato sottile sulla parete (ossia una distanza $y=R-r$ dalla parete tale che $y \ll R$)

Allora, posto $\sigma = y/R = 1 - \xi$ ($\sigma \ll 1$)

- il profilo di velocità si può linearizzare:

$$\phi(\xi) = \left(\frac{d\phi}{d\sigma} \right) \Big|_{\sigma=0} \sigma = (s+3) \sigma$$

- si può considerare la regione interessata come una regione piana, che si estende da $y=0$ a $y=\infty$

Evoluzione del profilo termico nella zona di imbocco

Eq. adimensionalizzata dell'energia

$$\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \sigma^2} \qquad \zeta = \frac{\zeta'}{s+3}$$

Cond. al contorno

$$\text{a } \zeta = 0 \qquad \Theta = 1$$

$$\text{a } \sigma = 0 \qquad \Theta = 0$$

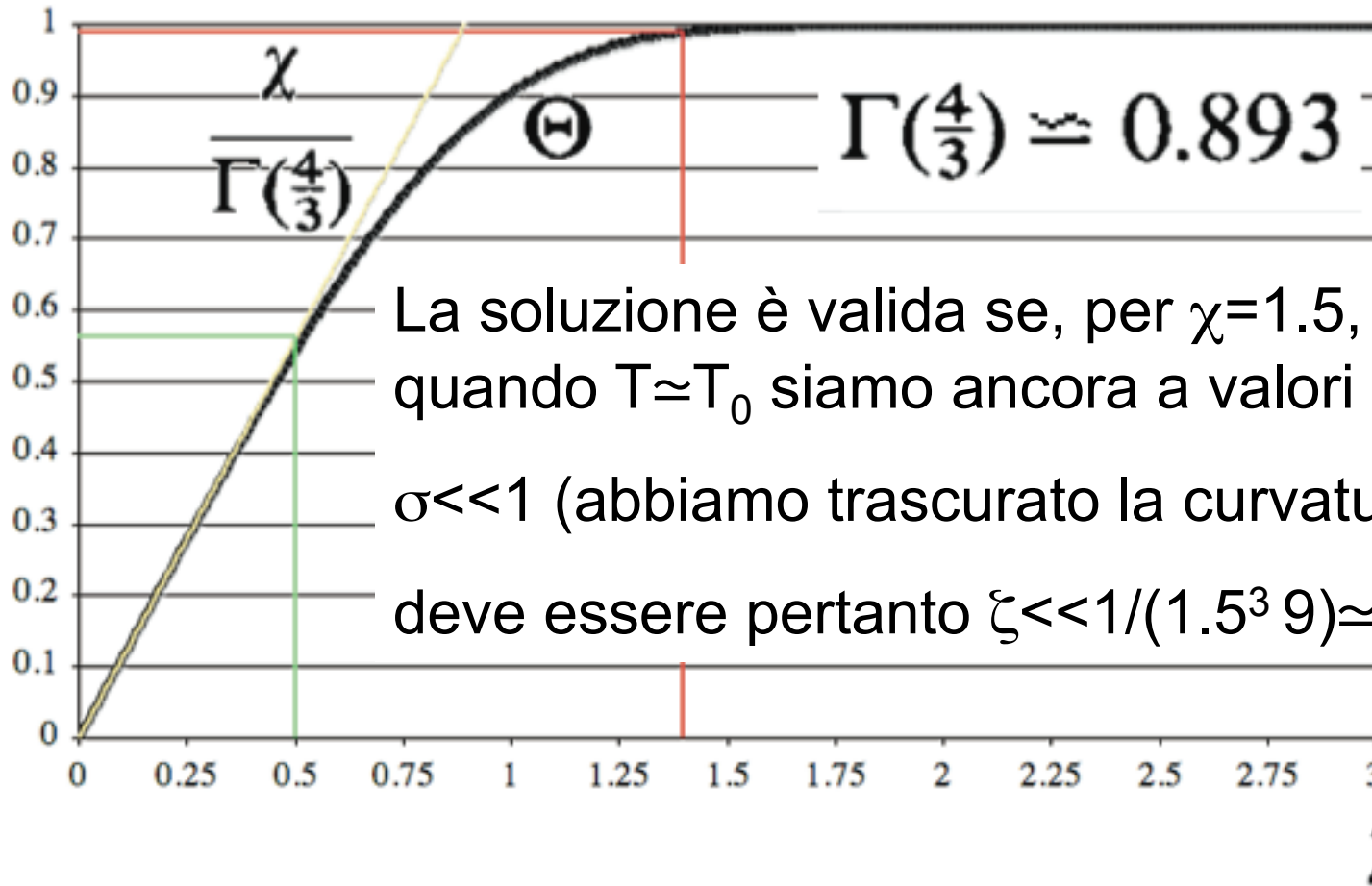
$$\text{a } \sigma = \infty \qquad \Theta = \text{finita}$$

E la soluzione è

$$\Theta = \frac{1}{\Gamma(\frac{4}{3})} \int_0^{\chi} e^{-\bar{\chi}^3} d\bar{\chi} \qquad \text{con} \qquad \chi = \frac{\sigma}{\sqrt[3]{9\zeta}}$$

Evoluzione del profilo termico nella zona di imbocco

$$\Theta = \frac{1}{\Gamma(\frac{4}{3})} \int_0^{\chi} e^{-\bar{\chi}^3} d\bar{\chi} \quad \chi = \frac{\sigma}{\sqrt[3]{9\zeta}}$$



Evoluzione del profilo termico nella zona di imbocco

$$\Theta = \frac{1}{\Gamma(\frac{4}{3})} \int_0^\chi e^{-\bar{\chi}^3} d\bar{\chi} \quad \chi = \frac{\sigma}{\sqrt[3]{9\zeta}}$$

$$\text{Nu} = \frac{2q_w R}{k(T_0 - T_1)} = \frac{2R (+k \partial T / \partial y)|_{y=0}}{k (T_0 - T_1)} = +2 \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0}$$

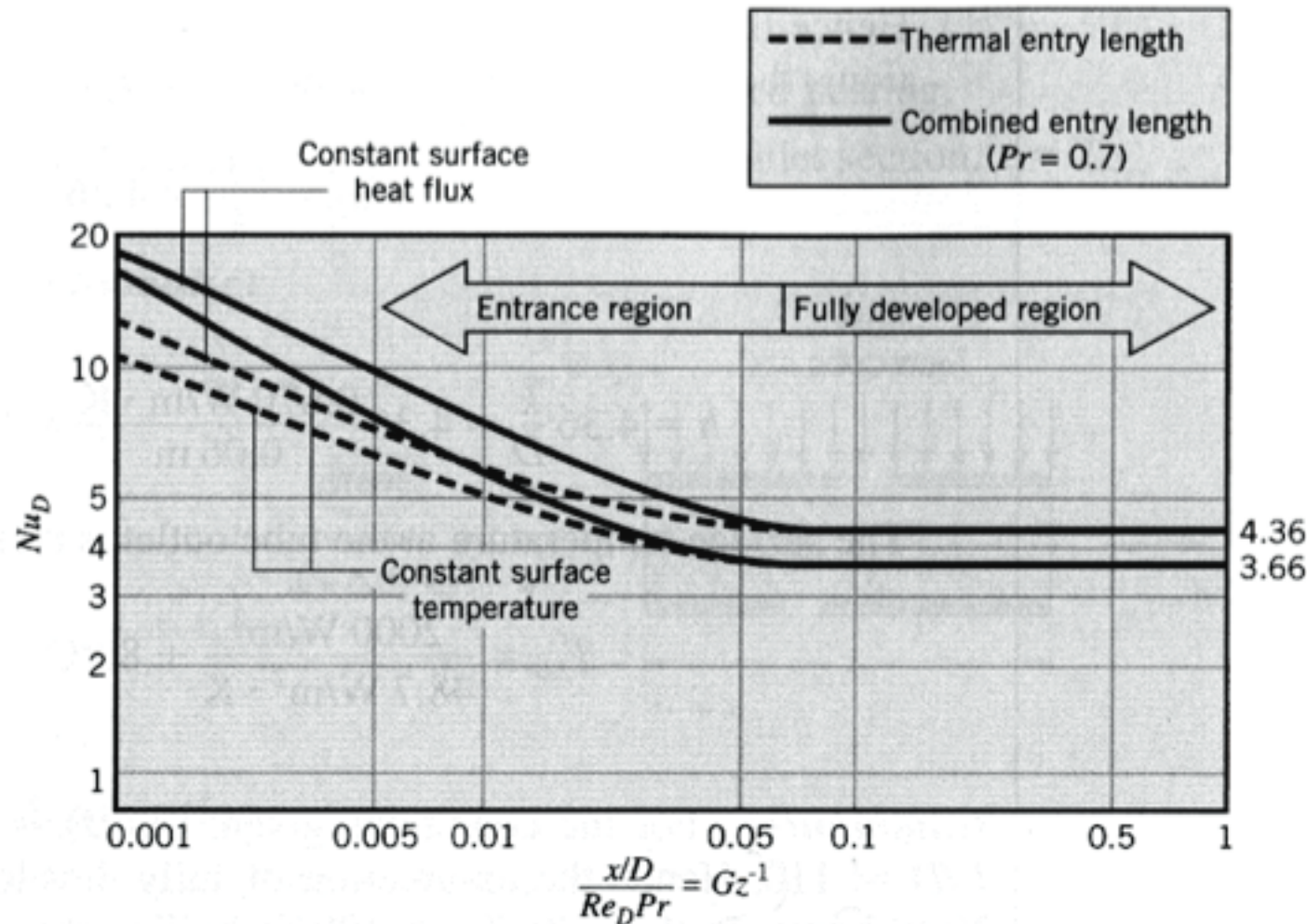
$$\text{Nu} = 2 \left. \frac{d\Theta}{d\chi} \right|_{\chi=0} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right) = \frac{2}{\Gamma(\frac{4}{3})} \sqrt[3]{\frac{1}{9\zeta}} = \frac{2}{\Gamma(\frac{4}{3})} \sqrt[3]{\frac{(s+3)\langle v_z \rangle R^2}{9\alpha z}}$$

$$\text{Nu} = \frac{2}{\Gamma(\frac{4}{3})} \sqrt[3]{\frac{(s+3)}{9 \cdot 4}} \sqrt[3]{\text{RePr}(D/z)}$$

Valida per $\zeta \ll 1/(1.5^3 9)$, ossia per $(\text{RePr}D/z)^{-1} \ll 0.03$ (se $s=1$)

Evoluzione del profilo termico nella zona di imbocco

$$Nu = \frac{2}{\Gamma(\frac{4}{3})} \sqrt[3]{\frac{(s+3)}{9 \cdot 4}} \sqrt[3]{RePr(D/z)}$$



Evoluzione del profilo termico nella zona di imbocco

$$\text{Nu} = \frac{2}{\Gamma(\frac{4}{3})} \sqrt[3]{\frac{(s+3)}{9 \cdot 4}} \sqrt[3]{\text{RePr}(D/z)}$$

Se il fluido è Newtoniano,
 $s=1$ e questo coeff.
numerico vale 1.08

Per ottenere il Nusselt medio si deve integrare da 0 a L e dividere per L

$$\overline{\text{Nu}} = 1.61 \sqrt[3]{\text{RePr}(D/L)}$$

Evoluzione del profilo termico nella zona di imbocco

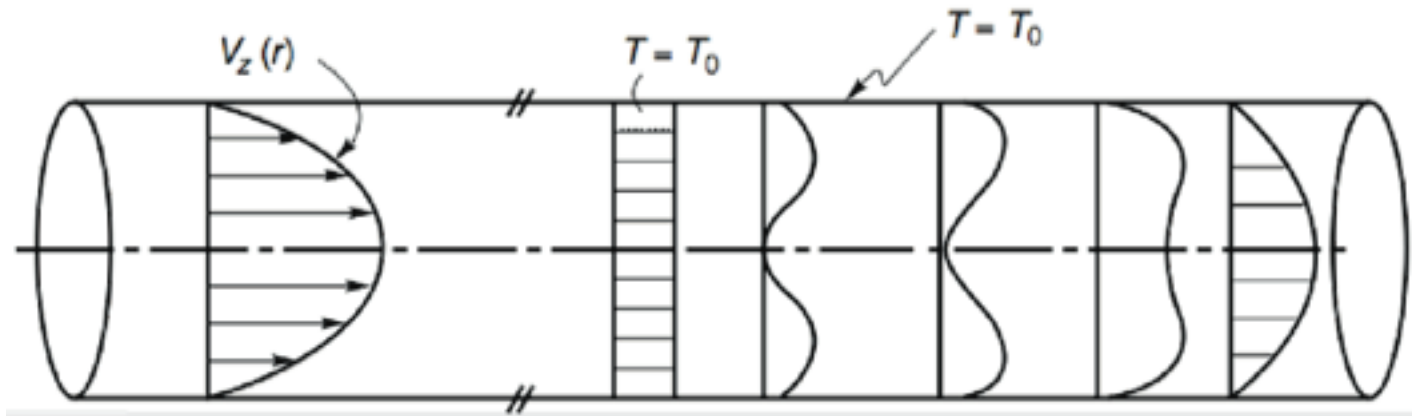
$$\overline{\text{Nu}} = 1.61 \sqrt[3]{\text{RePr}(D/L)}$$

che si confronta bene con le equazioni empiriche utilizzate per moto in condotti

$$\text{Nu}_{\text{ln}} = 1.86 \left(\text{RePr} \frac{D}{L} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_0} \right)^{0.14}$$

Effetto della generazione viscosa

Se la temperatura di parete è costante

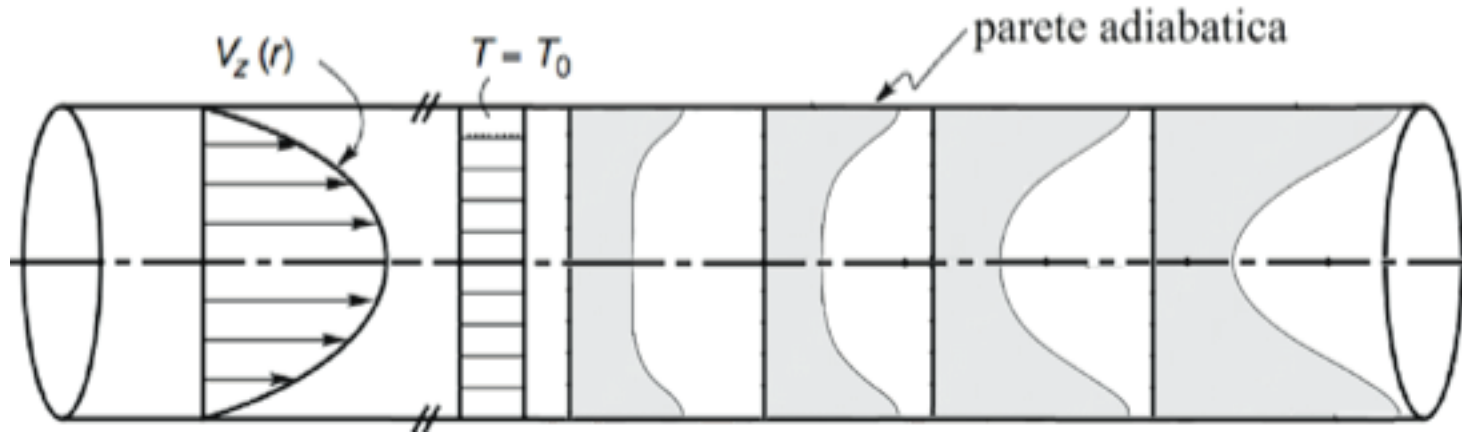


- la temperatura aumenta inizialmente soprattutto in prossimità della parete (lo sforzo, e quindi la dissipazione viscosa, è massimo alla parete)
- dopo un certo tratto, anche la temperatura all'asse aumenta
- ad una distanza dall'imbocco sufficientemente alta, il profilo di temperatura si stabilizza e non cambia più, perché il calore generato per dissipazione viscosa eguaglia quello scambiato per conduzione alla parete. Questo succede per $Gz \approx 1$ e quando l'innalzamento di temperatura è tale da rendere $Br \approx 1$, ossia

$$\Delta T \approx \mu v^2 / k$$

Effetto della generazione viscosa

Se la parete è adiabatica



- la temperatura aumenta inizialmente solo alla parete (lo sforzo, e quindi la dissipazione viscosa, è massimo alla parete)
- dopo un certo tratto, anche la temperatura all'asse aumenta, ma il massimo si raggiunge sempre alla parete
- il profilo di temperatura continua ad aumentare

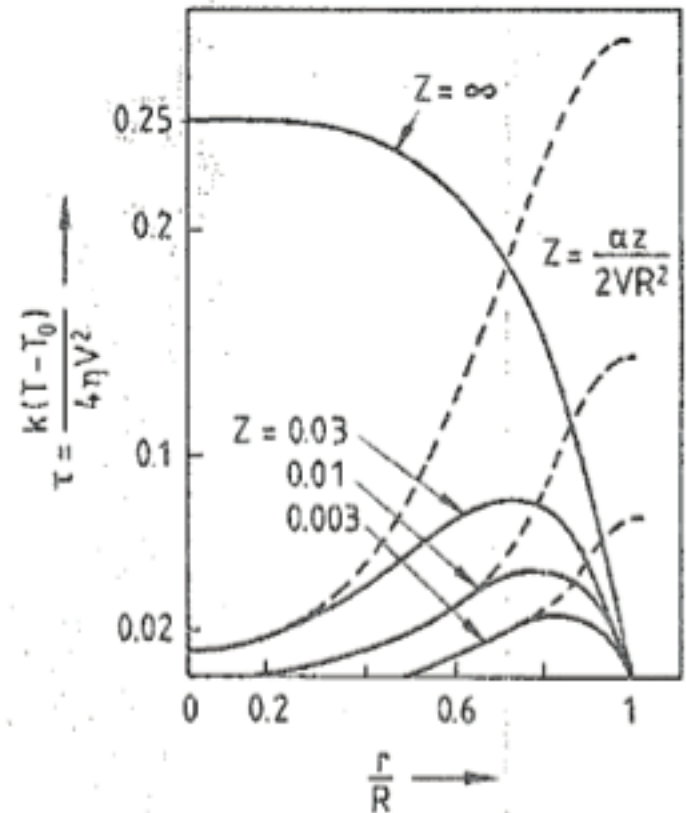
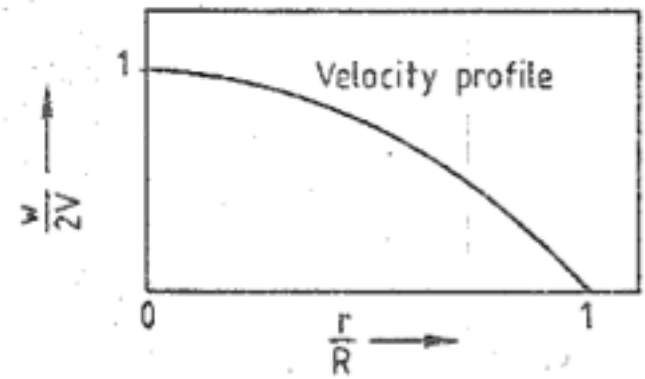
Effetto della generazione viscosa

Fluido newtoniano, profilo di velocità completamente sviluppato

Parete a T_0 , ingresso a T_0 per il caso a temperatura di parete costante

oppure

parete adiabatica, ingresso a T_0



Temperature profiles for the flow in a circular tube

————— constant wall temperature,
----- adiabatic wall

Profili di temperatura per moto in condotti con generazione viscosa

Fluido newtoniano, profilo termico completamente sviluppato
Parete a T_0 , ingresso a T_0

$$\rho c_p u_z(r) \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{16\eta V^2}{R^4} r^2$$

se $Pe \gg 1$, la conduzione assiale si può trascurare

$$\rho c_p u_z(r) \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \frac{16\eta V^2}{R^4} r^2$$

Profili di temperatura per moto in condotti con generazione viscosa

Fluido newtoniano, profilo termico completamente sviluppato
Parete a T_0 , ingresso a T_0

Quando la parete del condotto è fissata, il profilo di temperatura da un certo z in poi non cambia più.

Questo accade perchè il calore generato su una sezione viene completamente scambiato con la parete

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{dT}{dr} \right] = -16 \frac{\eta V^2}{k} \frac{r^3}{R^4}$$

$$T(r) = T_0 + \frac{\eta V^2}{k} \left[1 - \frac{r^4}{R^4} \right]$$

Profili di temperatura per moto in condotti con generazione viscosa

Fluido newtoniano, profilo termico completamente sviluppato
Parete a T_0 , ingresso a T_0

$$T(r) = T_0 + \frac{\eta V^2}{k} \left[1 - \frac{r^4}{R^4} \right]$$

La temperatura massima si raggiunge al centro e il ΔT massimo (quello fra il centro e la superficie) vale

$$\Delta T = \eta \frac{V^2}{k}$$

ossia è tale da rendere $Br=1$

Profili di temperatura per moto in condotti con generazione viscosa

Fluido newtoniano, profilo termico completamente sviluppato
Parete a T_0 , ingresso a T_0

$$T(r) = T_0 + \frac{\eta V^2}{k} \left[1 - \frac{r^4}{R^4} \right]$$

La temperatura media di bulk vale:

$$T_b = \frac{\int_0^R 2V [1 - (\tau/R)^2] T 2\pi r dr}{V \pi R^2} = T_0 + \frac{5}{6} \frac{\eta V^2}{k}$$

Il flusso termico alla parete vale:

$$q = -k \frac{dT}{dr} \Big|_R = 4\eta \frac{V^2}{R} = \frac{24}{5} k \left(\frac{T_b - T_0}{R} \right)$$

Profili di temperatura per moto in condotti con generazione viscosa

Fluido newtoniano, profilo termico completamente sviluppato
Parete a T_0 , ingresso a T_0

Il numero di Nusselt vale:

$$\text{Nu} = h \frac{D}{k} = \frac{48}{5}$$

Effetto della generazione viscosa

Numero di Nusselt per un fluido newtoniano.

Parete a T_0 , ingresso a T_0 , generazione viscosa

