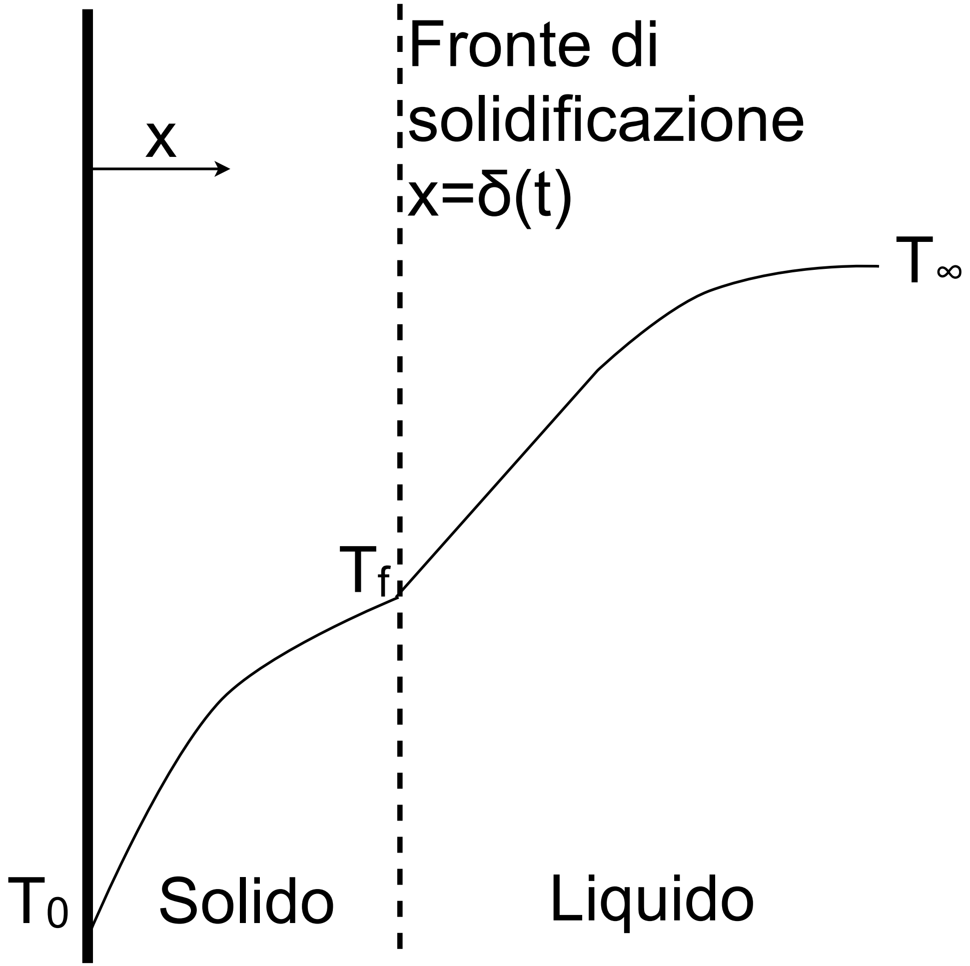
Diffusione del calore con transizione di fase

Fenomeni di Trasporto

La conduzione con transizione di fase (solidificazione o fusione) è un fenomeno presente in molte applicazioni, come la formazione di ghiaccio, la fusione del permafrost, la solidificazione di metalli.

Supponiamo di avere un liquido puro, inizialmente alla temperatura T_∞ maggiore della temperatura di fusione T_f. Al tempo $t=0$ la superficie, posta a $x=0$, viene portata istantaneamente a $T_0 < T_f$

Il fronte di solidificazione, che si trova a $x=\delta$ avanza nel tempo
Se identifichiamo con il pedice "S" la temperatura del solido possiamo scrivere



$$\frac{\partial T_S}{\partial t} = \alpha_S \frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2}$$

con le condizioni al contorno

$x=0 \qquad T_S=T_0$

$x=\delta \qquad T_S=T_f$

$$\frac{\partial T_S}{\partial t}=\alpha_S\frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2}$$ con le condizioni al contorno

x=0 $T_S=T_0$

x=0 $T_S=T_f$

possiamo ipotizzare una soluzione del tipo

$$T_S=c_1+c_2\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha_s t}}\right)$$

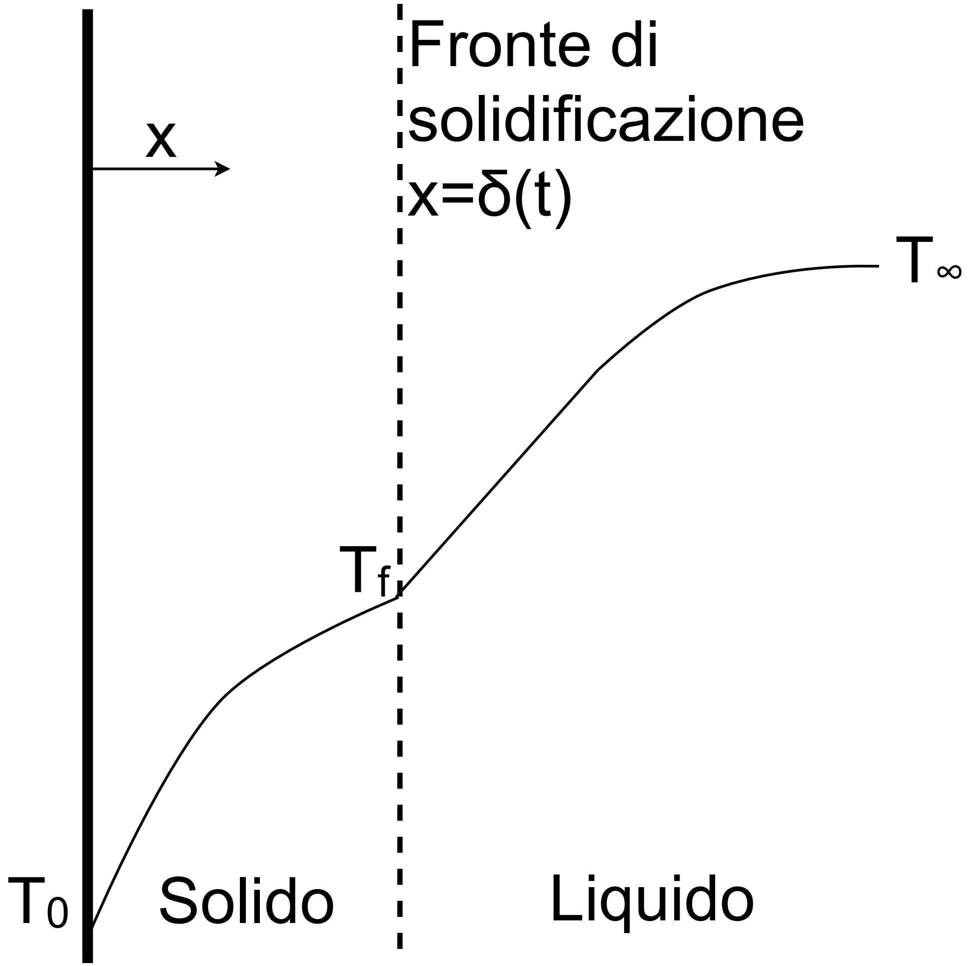
ottenendo

$$T_S=T_0+(T_f-T_0)\frac{\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha_s t}}\right)}{\mathrm{erf}\left(\frac{\delta}{\sqrt{4\alpha_s t}}\right)}$$

Oss.: affinchè la soluzione sia corretta, deve essere $\frac{\delta}{\sqrt{4\alpha_s t}}$ = cost. Supponiamo che ciò sia vero e chiamiamo γ questa costante

Il fronte di solidificazione, che si trova a x=δ avanza nel tempo

Se identifichiamo con il pedice "L" la temperatura del liquido possiamo scrivere



$$\frac{\partial T_L}{\partial t} = \alpha_L \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2}$$

con le condizioni al contorno

$x=\delta \qquad T_L=T_f$

$x\rightarrow\infty \qquad T_L=T_\infty$

$$\frac{\partial T_L}{\partial t}=\alpha_L\frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2}$$ con le condizioni al contorno

$x=\delta \quad T_L=T_f$

$x\rightarrow\infty \quad T_L=T_\infty$

possiamo ipotizzare una soluzione del tipo

$$T_L=c_3+c_4\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha_L t}}\right)$$

ottenendo

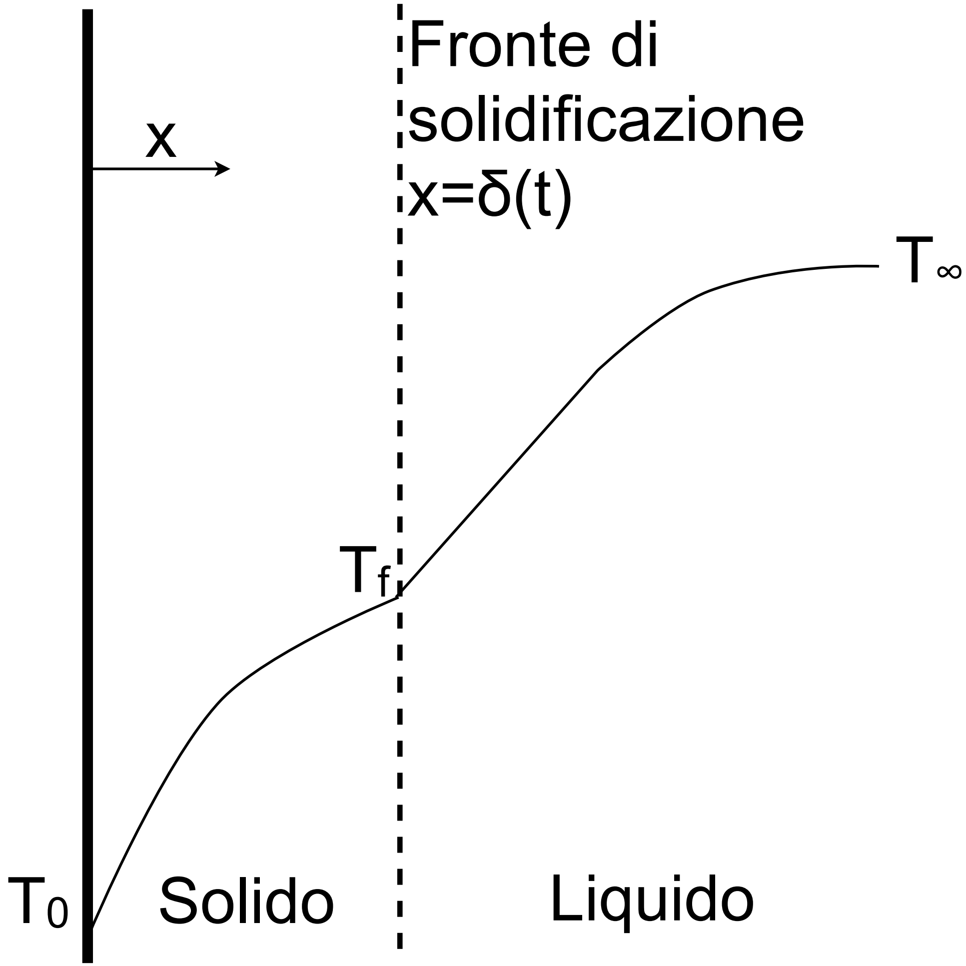
$$T_L=T_\infty-(T_\infty-T_f)\frac{\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha_L t}}\right)}{\mathrm{erfc}\left(\frac{\delta}{\sqrt{4\alpha_L t}}\right)}$$

Oss.: affinchè la soluzione sia corretta, deve essere $\frac{\delta}{\sqrt{4\alpha_L t}}=$ cost. Supponiamo che ciò sia vero e chiamiamo γ r questa costante ($r=\sqrt{\frac{\alpha_S}{\alpha_L}}$)

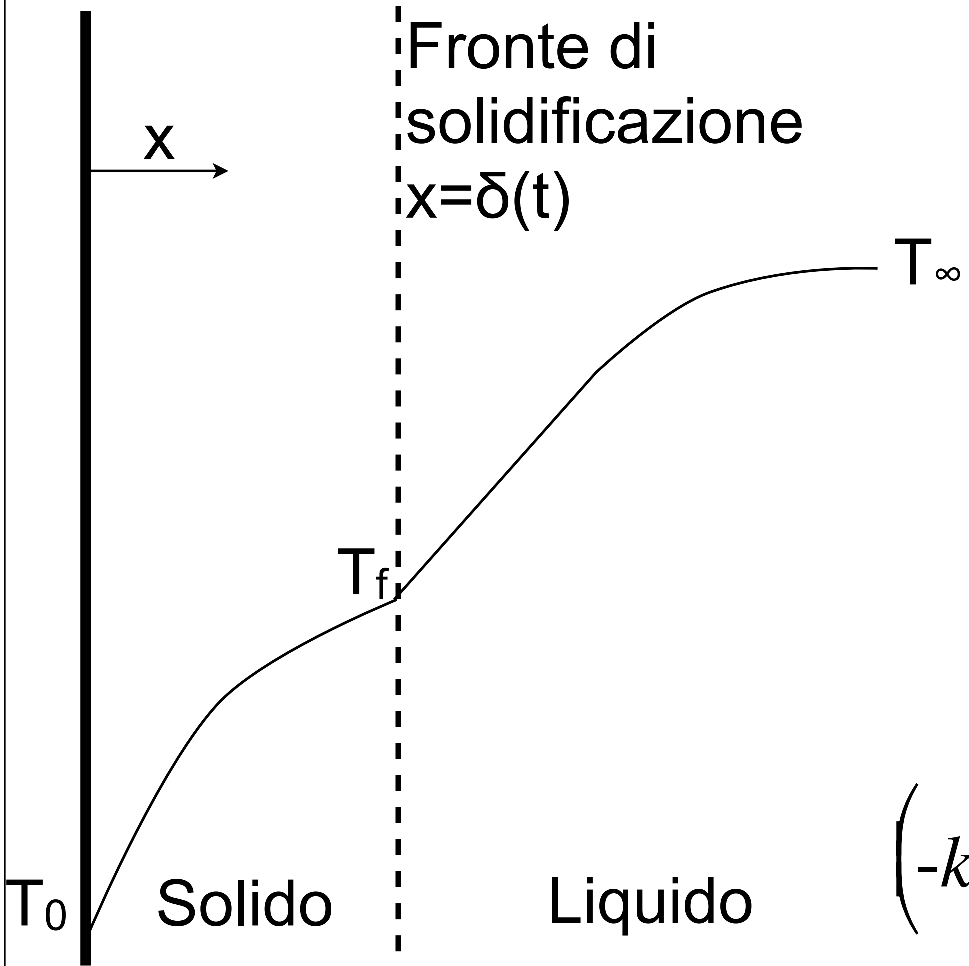
$$T_S = T_0 + (T_f - T_0)\frac{\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha_s t}}\right)}{\mathrm{erf}(\gamma)}$$

$$T_L = T_\infty - (T_\infty - T_f)\frac{\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha_L t}}\right)}{\mathrm{erfc}(\gamma r)}$$

manca una condizione per trovare il valore di γ e verificare che sia una costante.



Ogni massa differenziale dm che si trasforma da liquido a solido fa avanzare il fronte di solidificazione di un valore pari a $d\delta$ tale che $dm=\rho_S A\, d\delta$, dove ρ_S è la densità del solido e A la superficie perpendicolare all'avanzamento del fronte.



durante una trasformazione della massa dm da liquido a solido si libera una quantità di calore pari a

$$\lambda dm = \lambda\, \rho_S\, A\, d\delta$$

con λ=calore latente di solidificazione (positivo).

Possiamo pertanto scrivere

IN -OUT -GEN

$$\left(-k_S \frac{\partial T_S}{\partial x}\right)_{x=\delta} - \left(-k_L \frac{\partial T_L}{\partial x}\right)_{x=\delta} = -\lambda\, \rho_S\, \frac{d\delta}{dt}$$

$$T_S=T_0+(T_f-T_0)\frac{\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha_s t}}\right)}{\mathrm{erf}(\gamma)} \qquad T_L=T_\infty-(T_\infty-T_f)\frac{\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha_L t}}\right)}{\mathrm{erfc}(\gamma r)}$$

$$\left(k_S\frac{\partial T_S}{\partial x}\right)_{x=\delta}-\left(k_L\frac{\partial T_L}{\partial x}\right)_{x=\delta}=\frac{\lambda\,\rho_S\,\gamma\sqrt{\alpha_S}}{\sqrt{t}} \qquad \frac{\delta}{\sqrt{4\alpha_s t}}=\gamma$$

Il risultato è

$$k_S\frac{(T_f-T_0)}{\mathrm{erf}(\gamma)}\frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\pi\alpha_S t}}-k_L\frac{(T_\infty-T_f)}{\mathrm{erfc}(\gamma r)}\frac{e^{-\gamma^2 r^2}r}{\sqrt{\pi\alpha_S t}}=\frac{\lambda\rho_S\gamma\sqrt{\alpha_S}}{\sqrt{t}}$$

che è un’equazione in γ, indipendente dal tempo

Tale equazione si può risolvere (numericamente) per γ, per ottenere quindi sia i profili di temperatura che l’avanzamento del fronte di solidificazione δ

$$k_S \frac{(T_f - T_0)}{\mathrm{erf}(\gamma)} \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\pi \alpha_S t}} - k_L \frac{(T_\infty - T_f)}{\mathrm{erfc}(\gamma r)} \frac{e^{-\gamma^2 r^2} r}{\sqrt{\pi \alpha_S t}} = \frac{\lambda \rho_S \gamma \sqrt{\alpha_S}}{\sqrt{t}}$$

si può riscrivere come

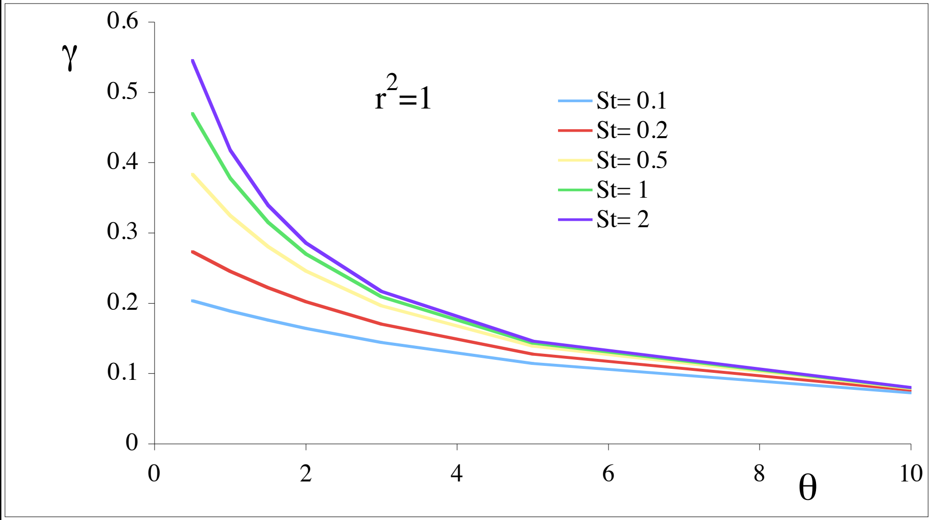
$$\frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma erf(\gamma)} - \theta \frac{e^{-\gamma^2 r^2} r}{\gamma\, erfc(\gamma r)} = \frac{\sqrt{\pi}}{St}$$

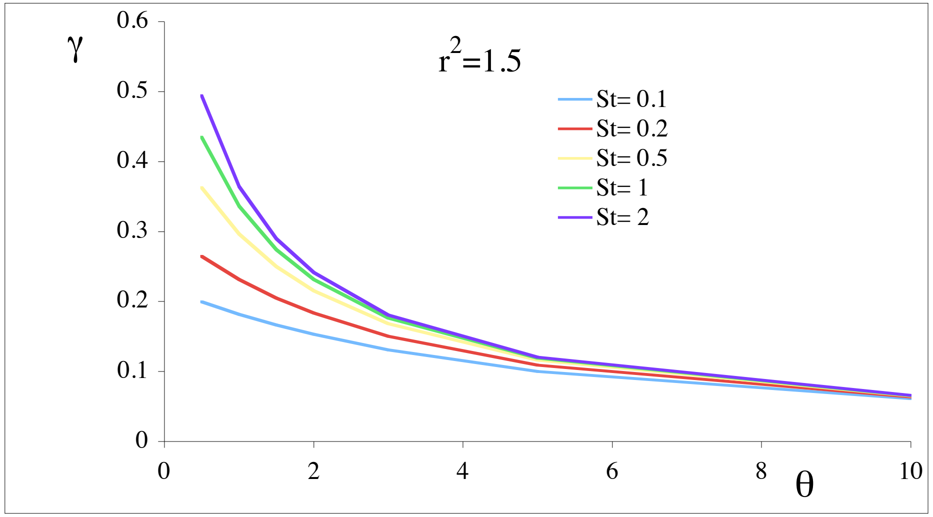
$$\theta = \frac{k_L}{k_S} \frac{(T_\infty - T_f)}{(T_f - T_0)} \qquad \mathrm{S}t = \frac{\mathrm{C}p(T_f - T_0)}{\lambda}$$

St= numero di Stefan
(se (T_f-T_0)$\cong$10, per l'acqua St$\cong$0.1,
per la paraffina St$\cong$0.9,
per il rame St$\cong$2.6)

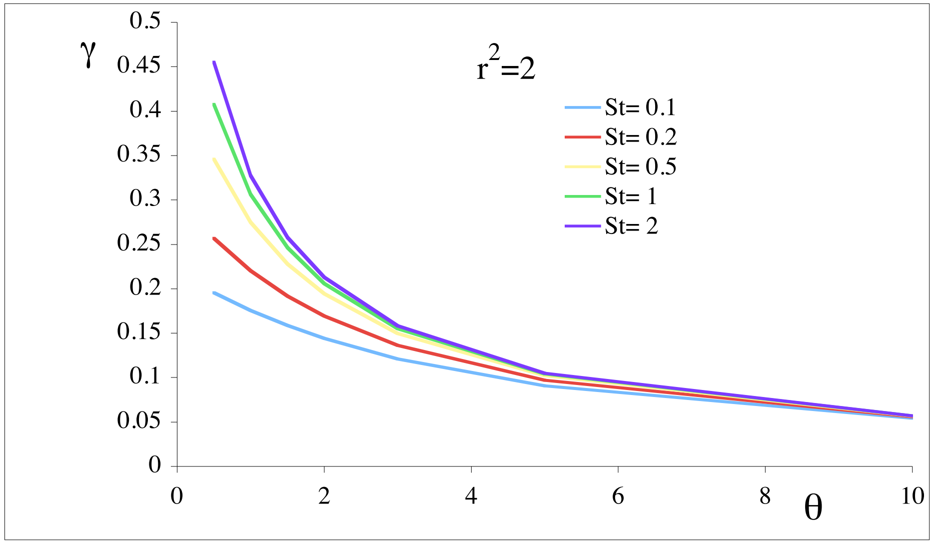
Le soluzioni dell'equazione sono riportate in funzione dei gruppi adimensionali

$$\theta = \frac{k_L}{k_S}\frac{(T_\infty - T_f)}{(T_f - T_0)} \qquad St = \frac{Cp(T_f - T_0)}{\lambda} \qquad r = \sqrt{\frac{\alpha_S}{\alpha_L}}$$





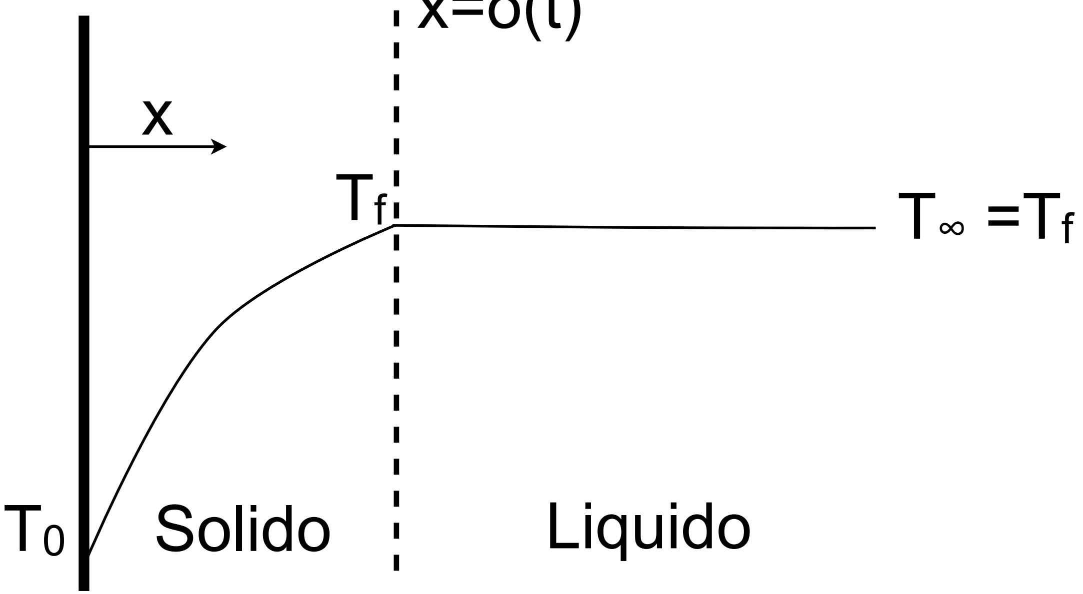
$$\frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma\, erf(\gamma)} - \theta \frac{e^{-\gamma^2 r^2} r}{\gamma\; erfc(\gamma r)} = \frac{\sqrt{\pi}}{St}$$



$$\frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma\,\mathrm{erf}(\gamma)} - \theta \frac{e^{-\gamma^2 r^2}}{\gamma\, r\, \mathrm{erfc}(\gamma r)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\mathrm{S}t}$$

Un caso di facile soluzione e di interesse pratico è quello in cui il liquido si trova proprio alla temperatura di fusione T_f, e perde solo il calore latente di solidificazione

Fronte di solidificazione $x=\delta(t)$



In questo caso

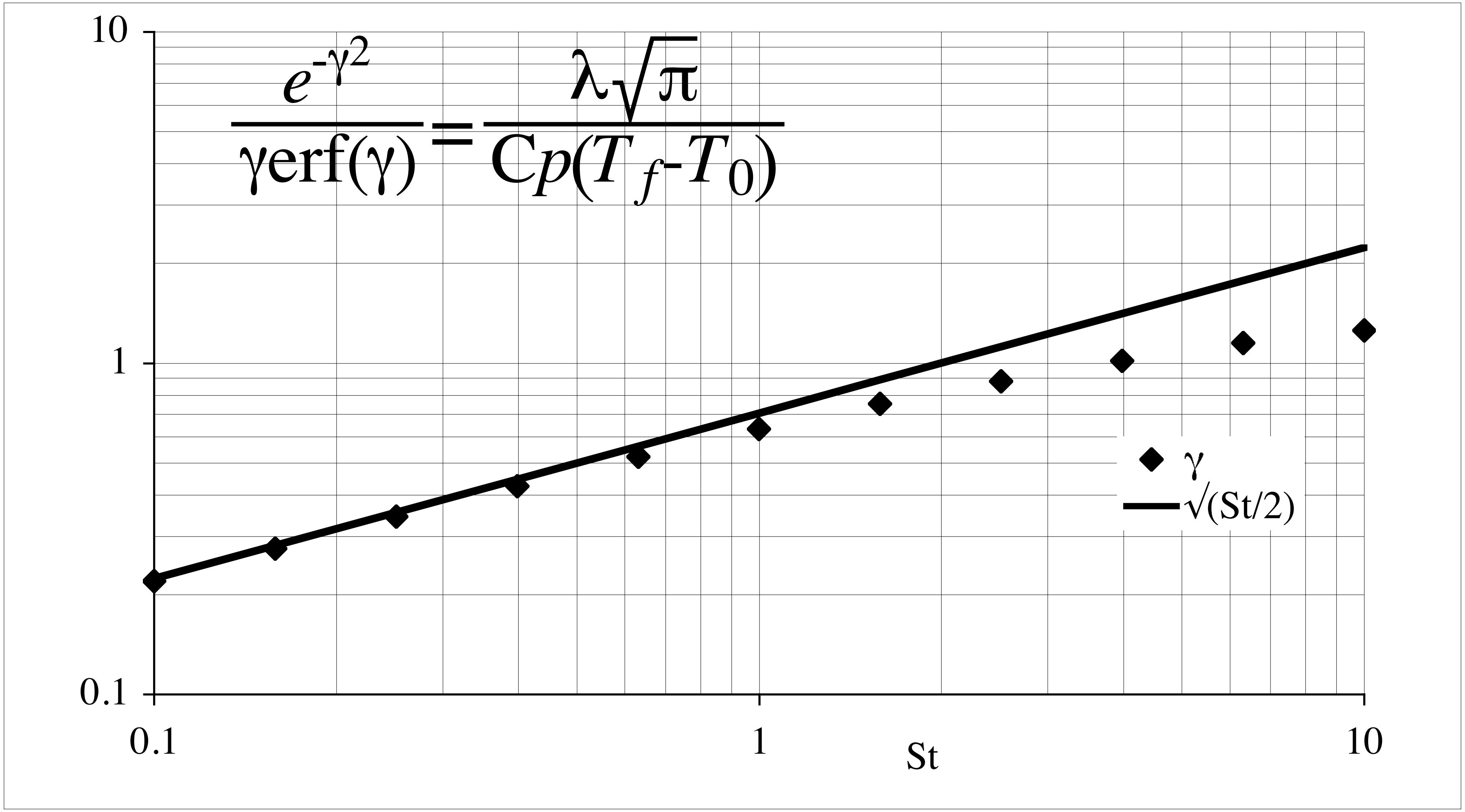
$$\theta = \frac{k_L}{k_S} \frac{(T_\infty - T_f)}{(T_f - T_0)} = 0$$

e quindi

$$\frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma\,\mathrm{erf}(\gamma)} = \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{\mathrm{C}p(T_f - T_0)}$$

$$\theta = \frac{k_L}{k_S}\frac{(T_\infty - T_f)}{(T_f - T_0)} = 0 \qquad St = \frac{Cp(T_f - T_0)}{\lambda} \qquad \frac{\delta}{\sqrt{4\alpha_s t}} = \gamma$$

$$\frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma \operatorname{erf}(\gamma)} = \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{Cp(T_f - T_0)}$$

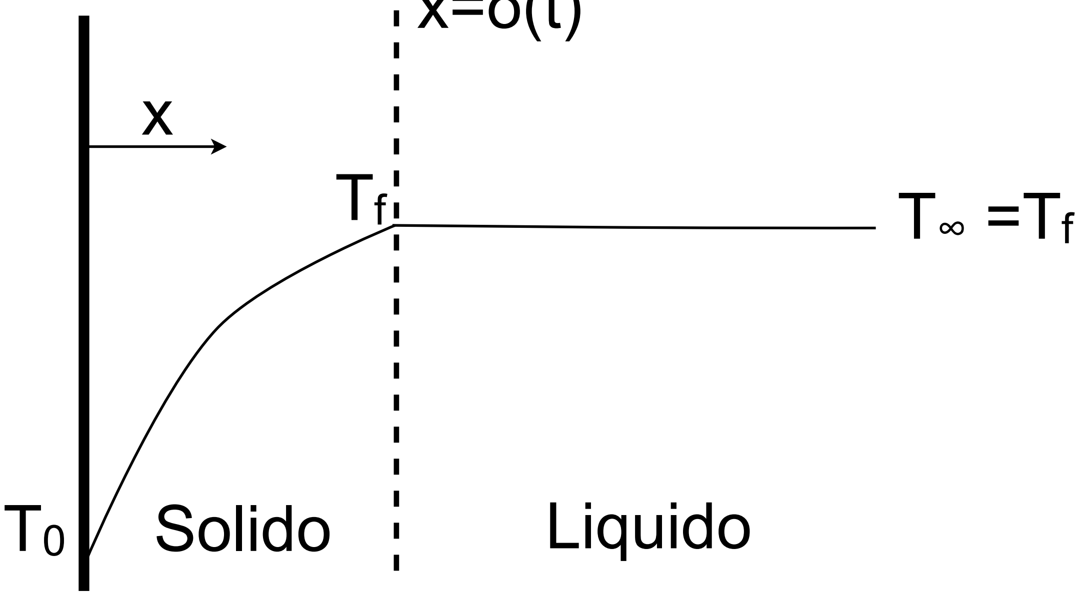


Liquido inizialmente a T_f

$$\frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma \mathrm{erf}(\gamma)} = \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{Cp(T_f - T_0)} \qquad \frac{\delta}{\sqrt{4\alpha_s t}} = \gamma$$

Consideriamo il caso in cui $\gamma << 1$ $\quad e^{-\gamma^2} \cong 1 \quad erf(\gamma) \cong \frac{2}{\sqrt{\pi}}\gamma$

Fronte di solidificazione $x=\delta(t)$



$$\gamma \cong \sqrt{\frac{Cp(T_f - T_0)}{2\lambda}} = \sqrt{\frac{St}{2}}$$

$$\gamma << 1 \Rightarrow St << 1$$

Liquido inizialmente a T_f

$$\gamma << 1 \Rightarrow St << 1 \qquad \gamma \cong \sqrt{\frac{Cp(T_f - T_0)}{2\lambda}} = \sqrt{\frac{St}{2}}$$

La velocità di avanzamento del fronte di solidificazione viene espressa dal bilancio

$$\left(k_S \frac{\partial T_S}{\partial x}\right)_{x=\delta} = \lambda\, \rho_S \frac{d\delta}{dt}$$

Possiamo valutare l'ordine di grandezza del tempo di avanzamento del fronte

$$\frac{\delta}{t_\delta} \sim \frac{k_S}{\lambda\, \rho_S} \frac{T_f - T_0}{\delta} \Rightarrow t_\delta \sim \frac{\lambda\, \rho_S}{k_S} \frac{\delta^2}{T_f - T_0}$$

Liquido inizialmente a T_f

$$\gamma << 1 \Rightarrow St << 1$$

$$\gamma \cong \sqrt{\frac{Cp(T_f - T_0)}{2\lambda}} = \sqrt{\frac{St}{2}}$$

L'equazione di diffusione del calore nel solido è sempre

$$\frac{\partial T_S}{\partial t} = \alpha_S \frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2}$$

Possiamo valutare l'ordine di grandezza del tempo di diffusione

$$t_D \sim \frac{\delta^2}{\alpha_S}$$

Il rapporto fra i due tempi è proprio

$$\frac{t_D}{t_\delta} \sim St$$

Dire che il tempo di diffusione è molto minore del tempo di avanzamento del fronte di solidificazione significa dire che quando il fronte avanza la temperatura riesce aq raggiungere istante per istante la soluzione lineare di regime

Liquido inizialmente a T_f

$$\gamma << 1 \Rightarrow St << 1$$

$$\frac{\delta}{\sqrt{4\alpha_s t}} = \gamma$$

$$T_S = T_0 + (T_f - T_0)\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha_s t}}\right)}{\operatorname{erf}(\gamma)} \cong T_0 + (T_f - T_0)\frac{x}{\delta}$$

Il profilo è effettivamente lineare

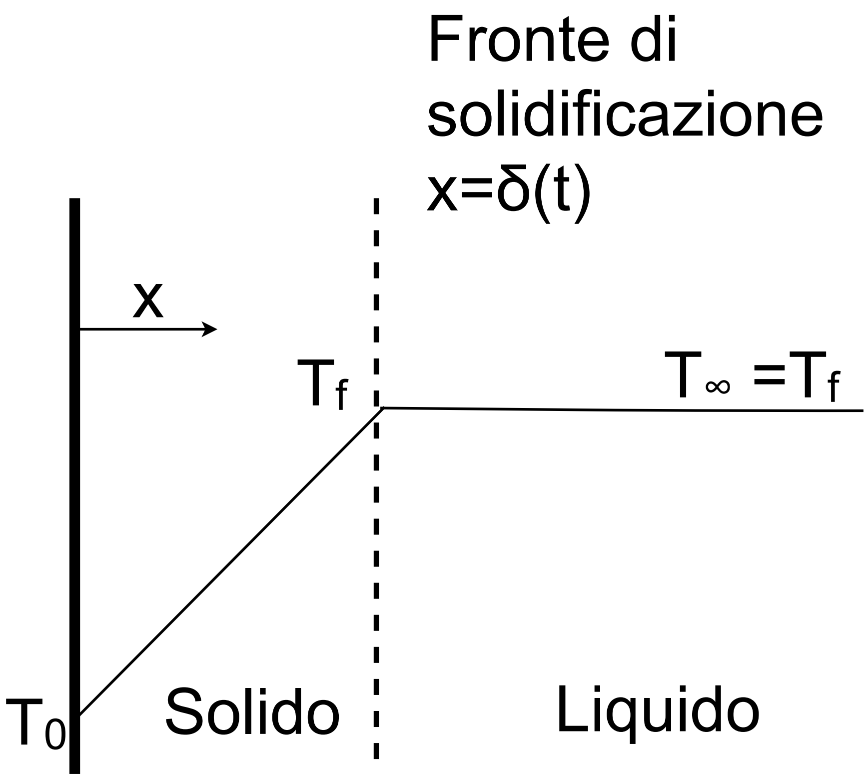
Oss.: se $\gamma<<1$, anche $x/\sqrt{(4\alpha_S t)}<<1$

Liquido inizialmente a T_f

$$\frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma \operatorname{erf}(\gamma)} = \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{Cp(T_f - T_0)}$$

$$\frac{\delta}{\sqrt{4\alpha_s t}} = \gamma$$

$$\gamma << 1 \Rightarrow St << 1$$



L'equazione di bilancio si scrive

$$k_S \frac{(T_f - T_0)}{\delta} = \lambda \rho_S \frac{d\delta}{dt}$$

che fornisce facilmente l'espressione di δ

$$\delta = \sqrt{\frac{2k_S(T_f - T_0)}{\lambda \rho_S} t} = \sqrt{\frac{Cp(T_f - T_0)}{2\lambda}} \sqrt{4\alpha_S t}$$