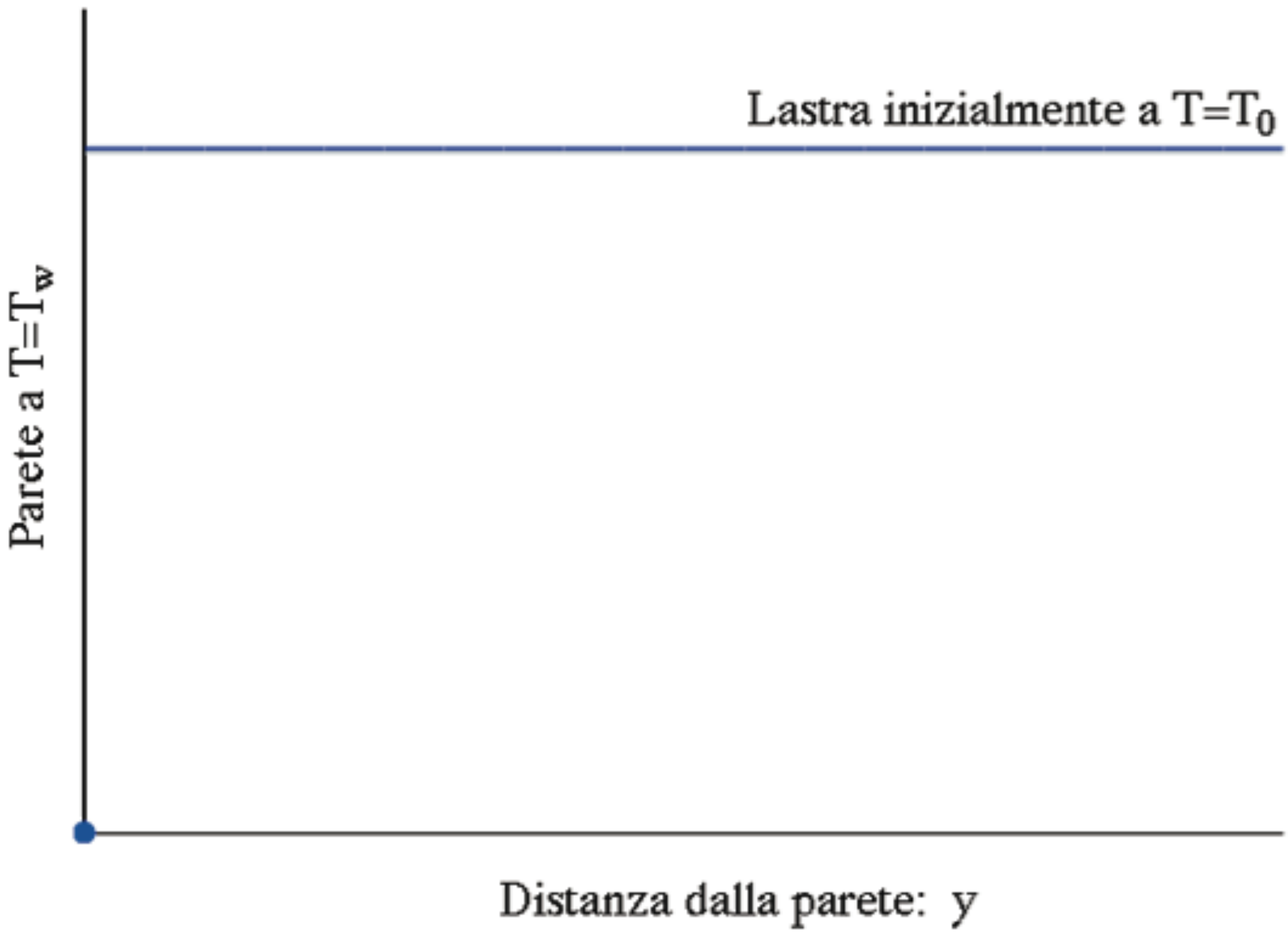
Profili di temperatura nei solidi

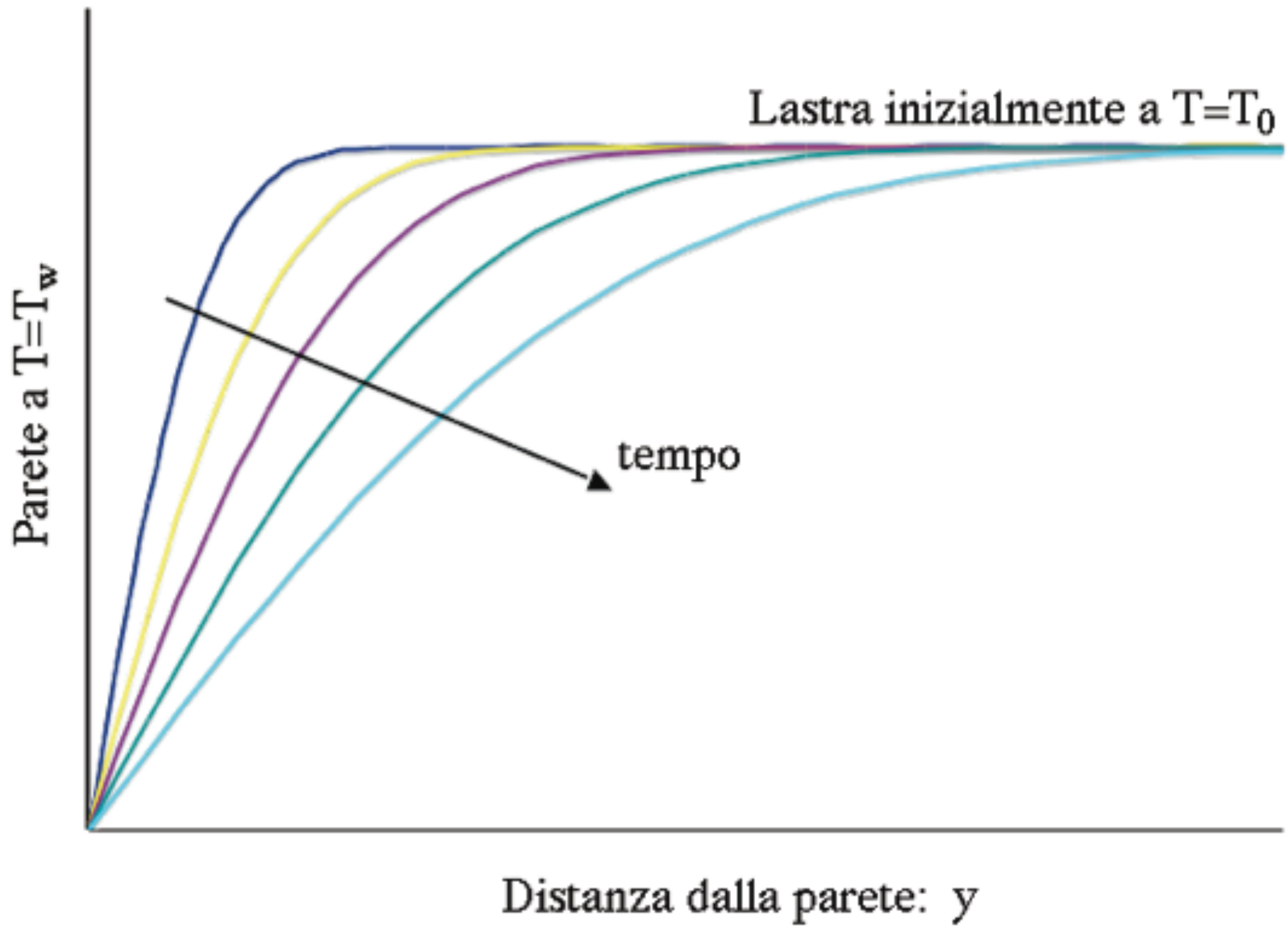
analisi del transitorio

Fenomeni di Trasporto

Transitorio di temperatura in una lastra semi-infinita



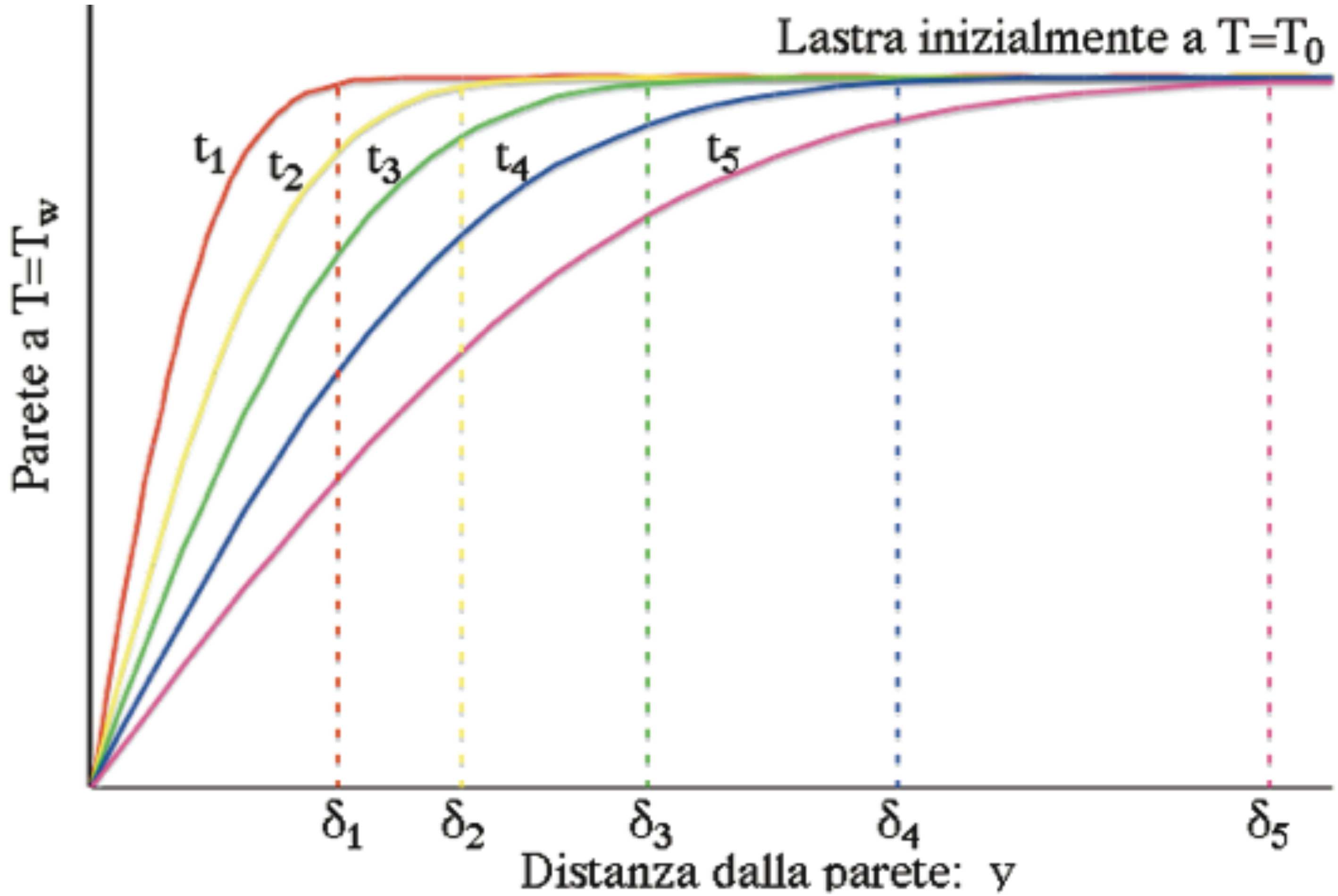
Transitorio di temperatura in una lastra semi-infinita



Transitorio di temperatura in una lastra semi-infinita

Definiamo $\delta(t)$ come quello strato oltre il quale la lastra non si accorge del cambio di temperatura alla parete:

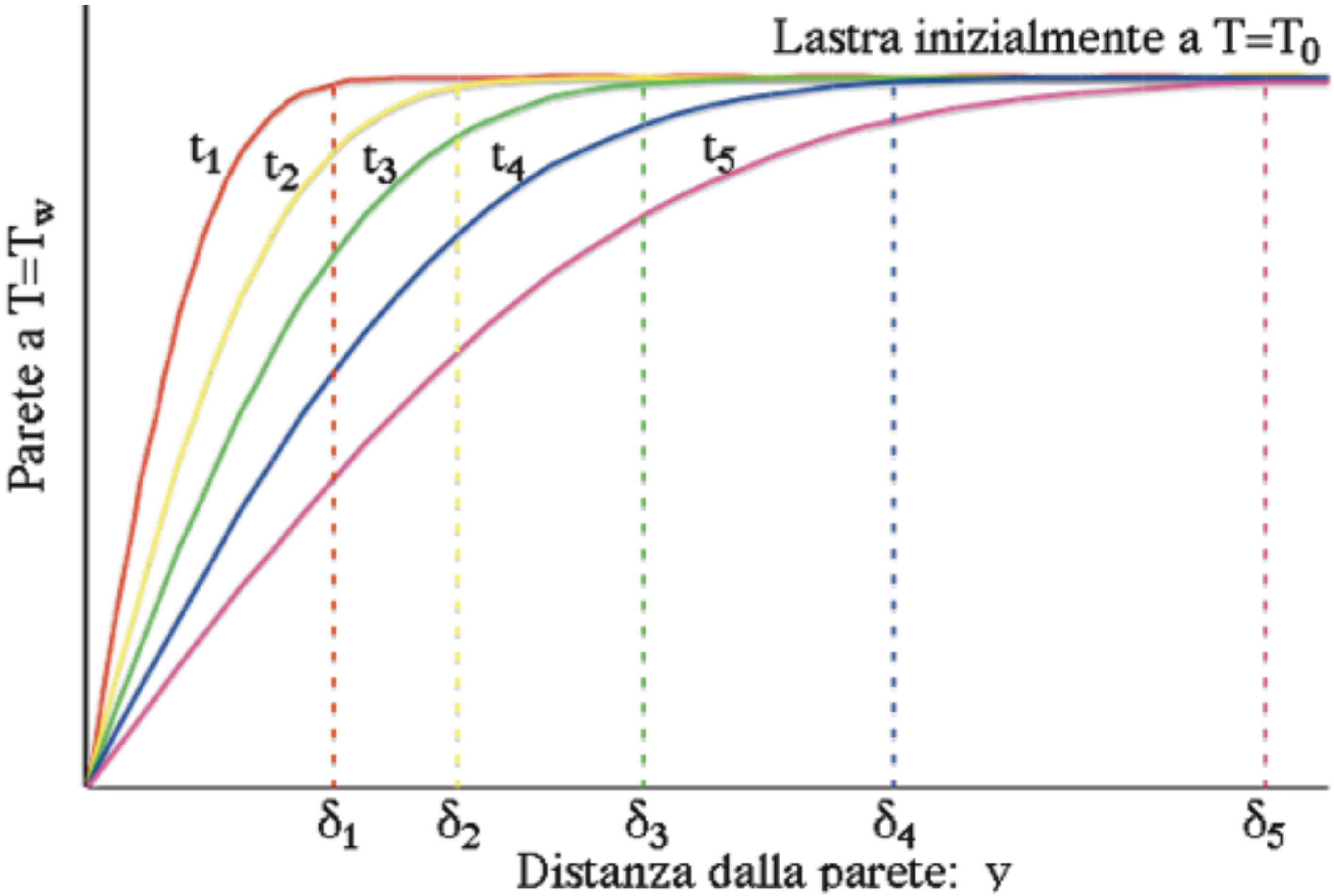
strato di **penetrazione** del calore



Transitorio di temperatura in una lastra semi-infinita

Numericamente, $\delta(t)$ è il valore di y per cui

$$\Theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = 0.99$$



Transitorio di temperatura in una lastra semi-infinita

Equazione dell'energia (conduzione in un solido, conducibilità costante, una sola direzione)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Condizioni iniziali e al contorno:

$$T(y,t=0) = T_0$$

$$T(y=0,t) = T_w$$

$$T(y\to\infty,t) = T_0$$

Transitorio di temperatura in una lastra semi-infinita

Equazione dell'energia (conduzione in un solido, conducibilità costante, una sola direzione)

$$\Theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}$$

Condizioni iniziali e al contorno:

$$\Theta(y,0) = \Theta(\infty, t) = 1$$

$$\Theta(0,t) = 0$$

Transitorio di temperatura in una lastra semi-infinita

Analisi degli ordini di grandezza

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}$$

$$\frac{1}{t} \approx \frac{\alpha}{\delta^2}$$

$$\delta \approx \sqrt{(\alpha t)}$$

Transitorio di temperatura in una lastra semi-infinita

La soluzione dell'equazione differenziale è

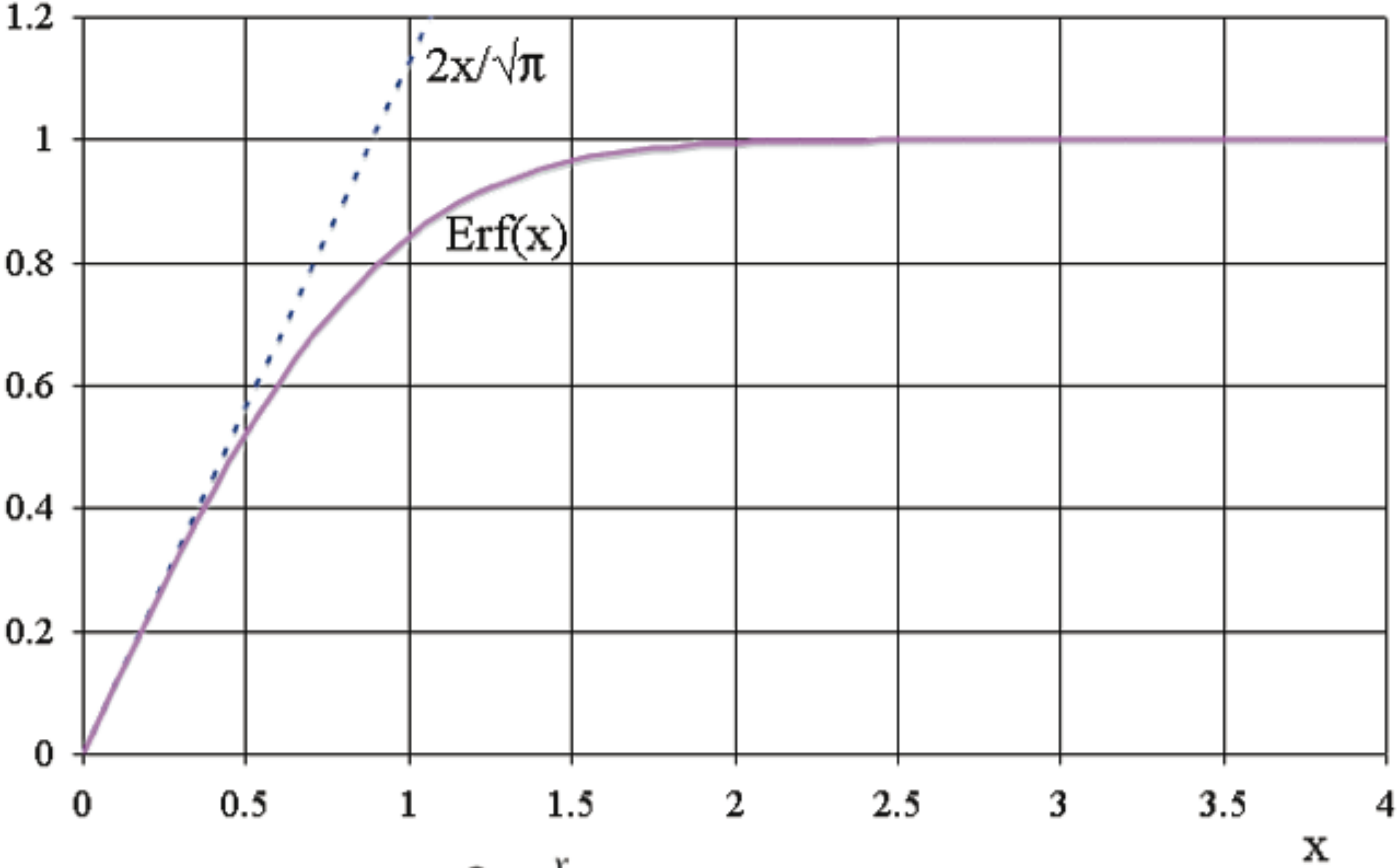
$$\Theta(y,t) = erf(\eta)$$

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{4\alpha t}}$$

Nota: $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$

$$erf(0) = 0$$
$$erf(\infty) = 1$$

La funzione degli errori



$$erf\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}\,d\xi$$

$$erf(0) = 0$$
$$erf(\infty) = 1$$

Transitorio di temperatura in una lastra semi-infinita

La soluzione dell’equazione differenziale è

$$\Theta(y,t) = erf(\eta) \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{4\alpha t}}$$

$$erf(2) \cong 0.99$$

$$\delta = 4\sqrt{(\alpha t)}$$

Transitorio di temperatura in una lastra semi-infinita

Il flusso termico alla parete vale

$$J_Q = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$$

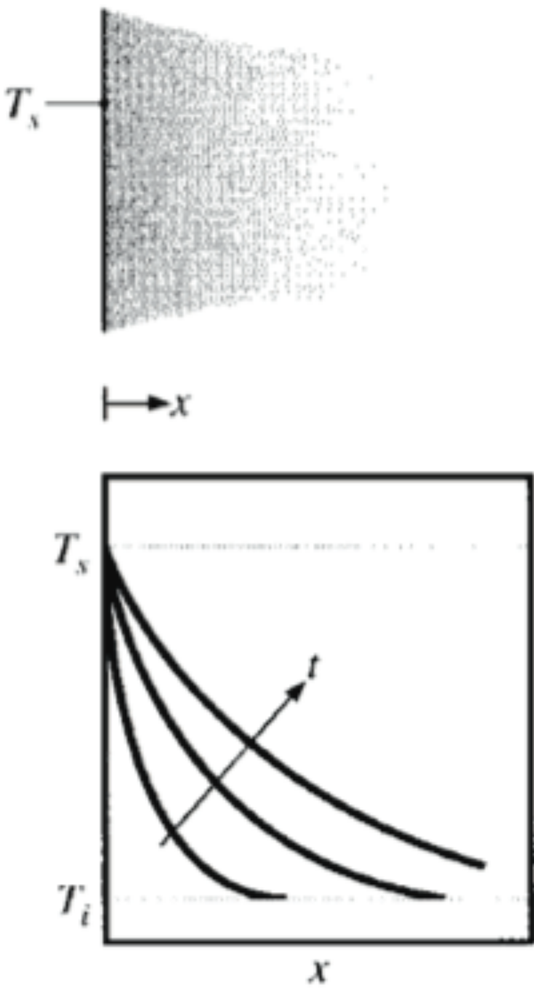
$$= -k\left(T_0 - T_w\right)\left(\frac{d\Theta}{d\eta}\right)_{\eta=0}\frac{d\eta}{dy}$$

$$= -\frac{k\left(T_0 - T_w\right)}{\sqrt{\pi\alpha t}}$$

Transitorio di temperatura in una lastra semi-infinita

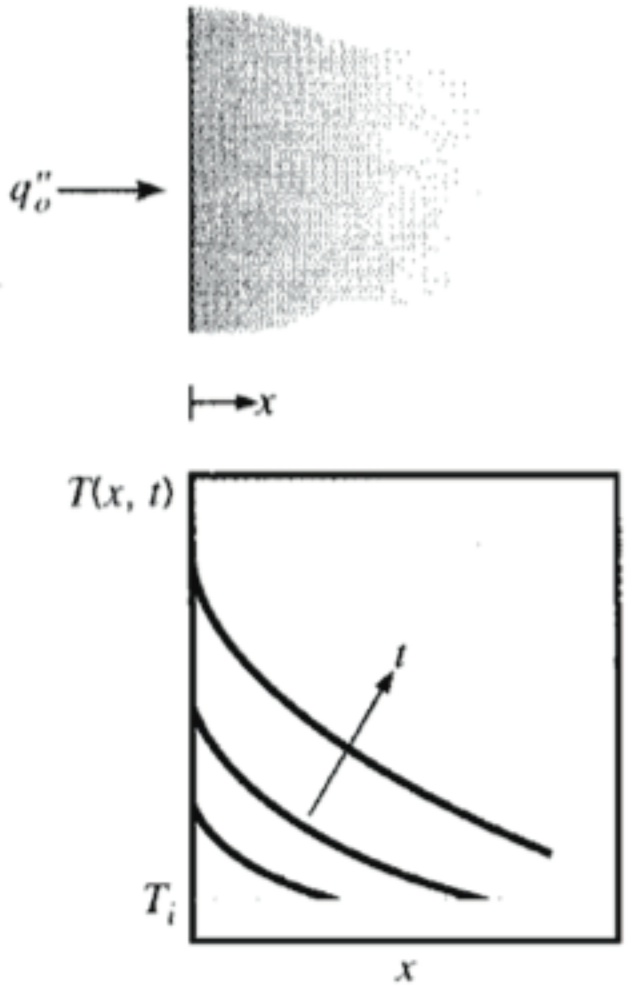
Temperatura imposta alla parete

$$T(x, 0) = T_i$$
$$T(0, t) = T_s$$



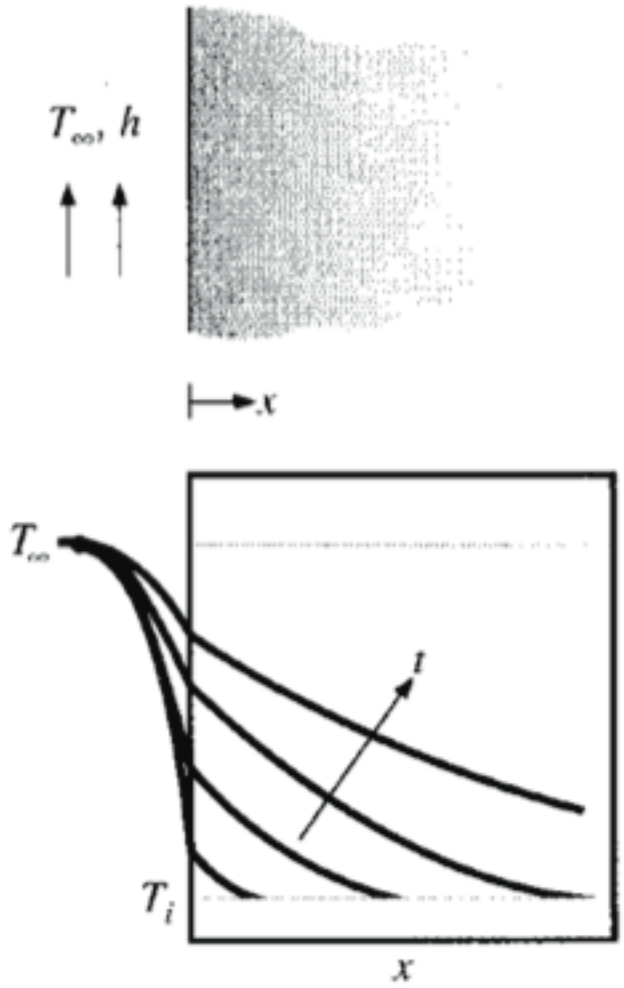
Flusso imposto alla parete

$$T(x, 0) = T_i$$
$$-k \, \partial T/\partial x|_{x=0} = q''_o$$



Temperatura all'infinito e coeff. di scambio alla parete

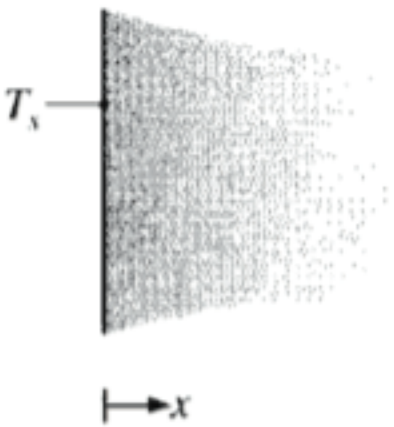
$$T(x, 0) = T_i$$
$$-k \, \partial T/\partial x|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$$



Transitorio di temperatura in una lastra semi-infinita

Temperatura imposta alla parete

$$T(x,0) = T_i$$
$$T(0,t) = T_s$$

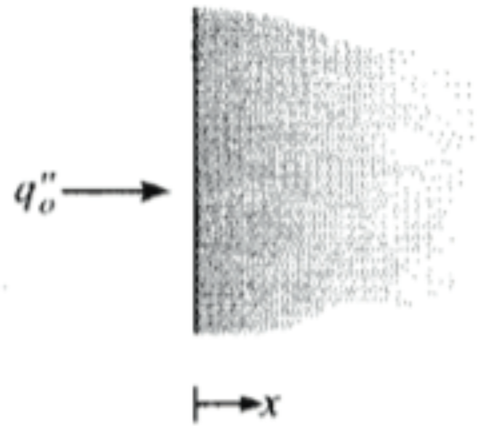


$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

$$q''_s(t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

Flusso imposto alla parete

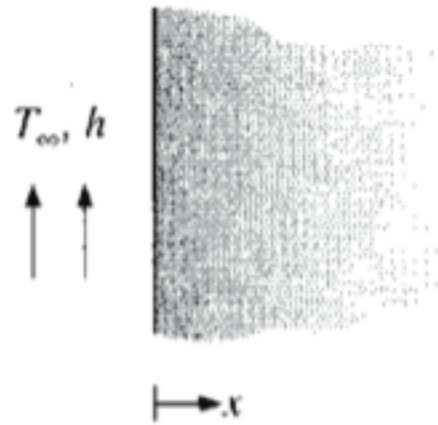
$$T(x,0) = T_i$$
$$-k\,\partial T/\partial x|_{x=0} = q''_o$$



$$T(x,t) - T_i = \frac{2q''_o(\alpha t/\pi)^{1/2}}{k}\exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{q''_o x}{k}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

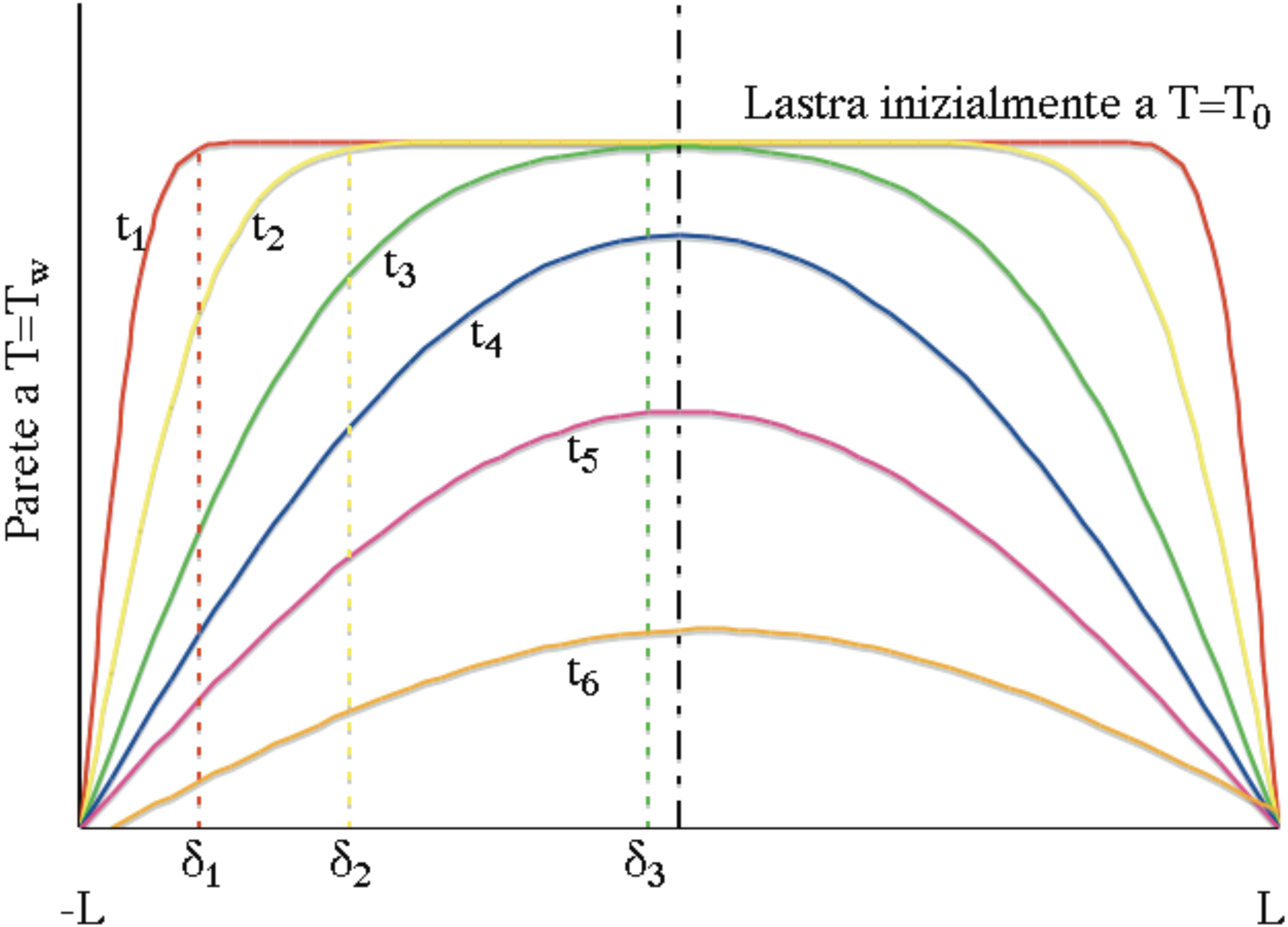
Temperatura all'infinito e coeff. di scambio alla parete

$$T(x,0) = T_i$$
$$-k\,\partial T/\partial x|_{x=0} = h[T_\infty - T(0,t)]$$



$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha t}{k^2}\right)\right]\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)\right]$$

Transitorio di temperatura in una lastra finita



Transitorio di temperatura in una lastra finita

Equazione dell'energia (conduzione in un solido, conducibilità costante, una sola direzione)

$$\Theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} \qquad \tilde{x} = x / L \qquad \tilde{t} = t / \left(L^2 / \alpha\right)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tilde{x}^2}$$

Condizioni iniziali e al contorno:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}}\left(0, \tilde{t}\right) = \Theta\left(1, \tilde{t}\right) = 0 \qquad \Theta\left(\tilde{x}, 0\right) = 1$$

Transitorio di temperatura in una lastra finita

Analisi degli ordini di grandezza

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tilde{x}^2}$$

Se $\tilde{t} >> 1$ ossia $\mathrm{t} >> L^2 / \alpha$

il termine di accumulo diventa trascurabile: siamo in condizioni di regime

Nota: $t\,\alpha/L^2$ prende il nome di *numero di Fourier* (simbolo Fo)

Transitorio di temperatura in una lastra finita

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$\Theta(\tilde{x},\tilde{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \cos\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi\tilde{x}\right] e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \tilde{t}}$$

Transitorio di temperatura in una lastra finita

Per tempi lunghi il termine dominante della serie è il primo:

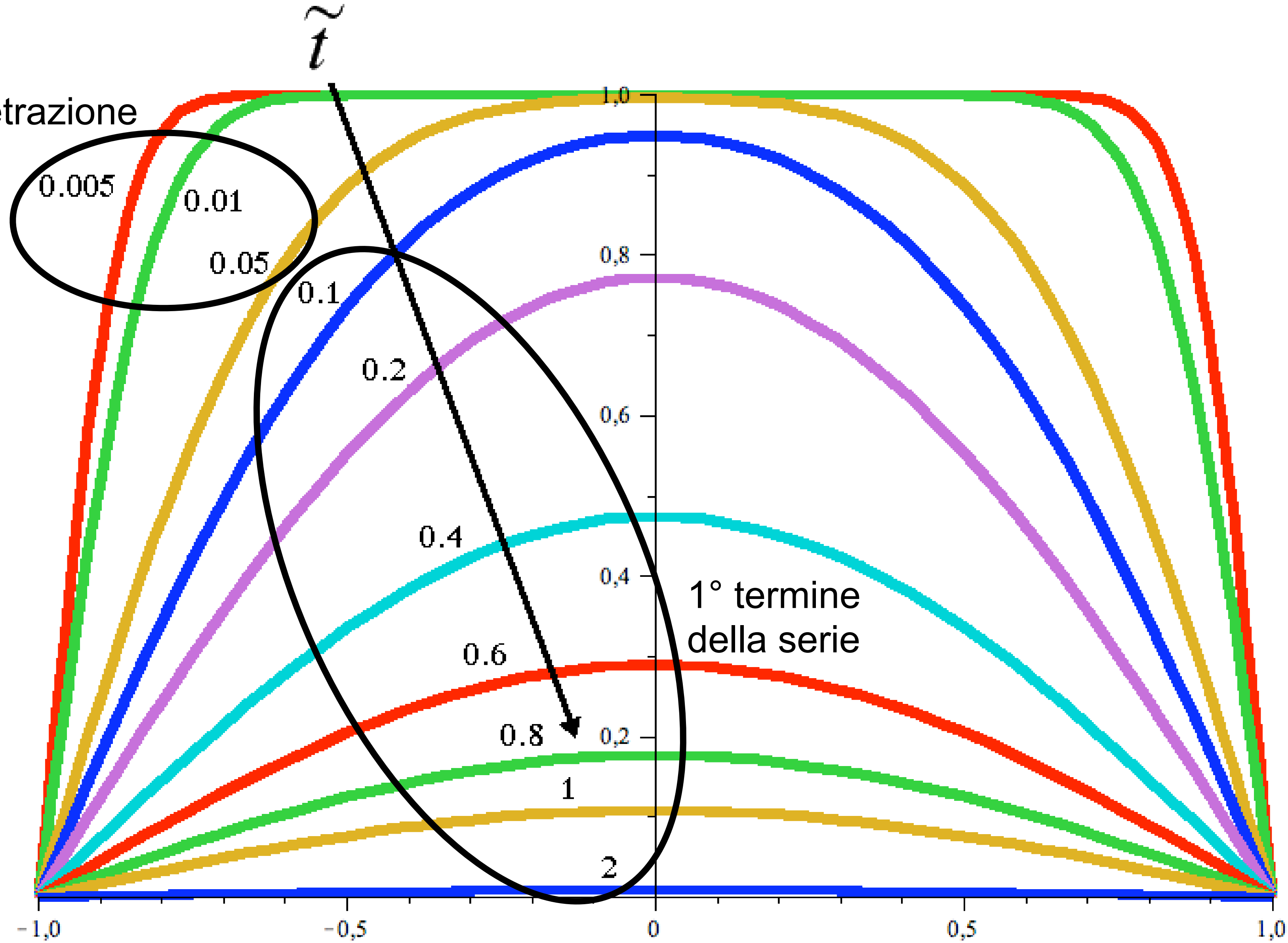
$$\tilde{t} > \frac{1}{\pi^2}$$

$$\Theta(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{4}{\pi} \cos(\pi \tilde{x} / 2) e^{-\pi^2 \tilde{t} / 4}$$

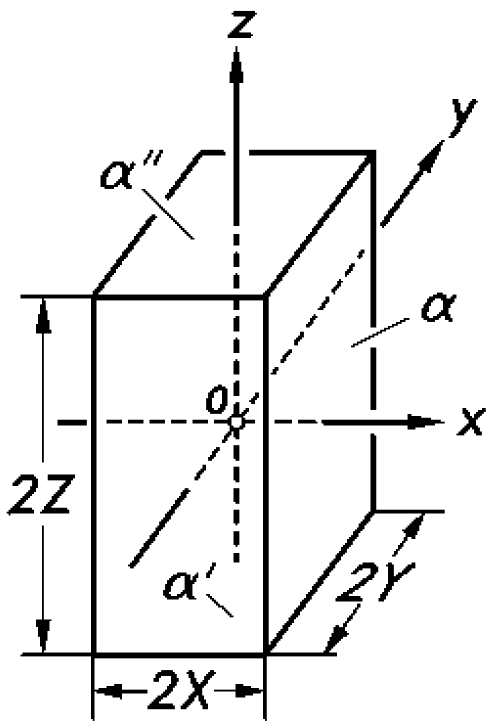
E per $\tilde{t} \cong 2$ ossia $\tilde{t} \cong 2 \dfrac{L^2}{\alpha}$

si raggiunge in pratica lo stato stazionario: $\Theta = 0$

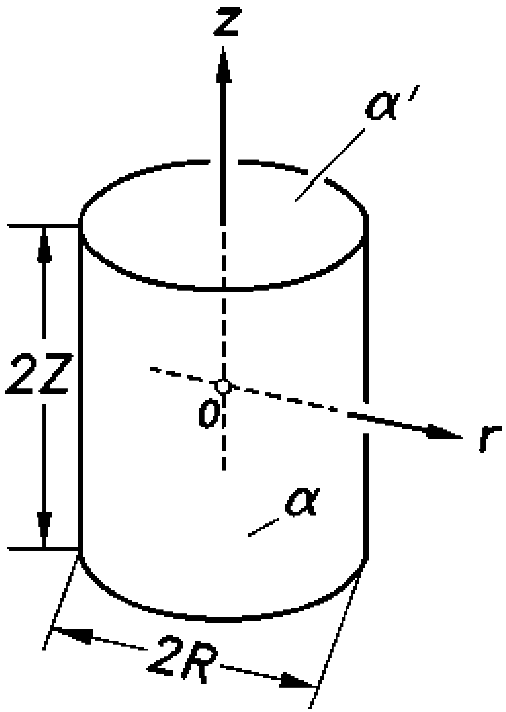
Transitorio di temperatura in una lastra finita



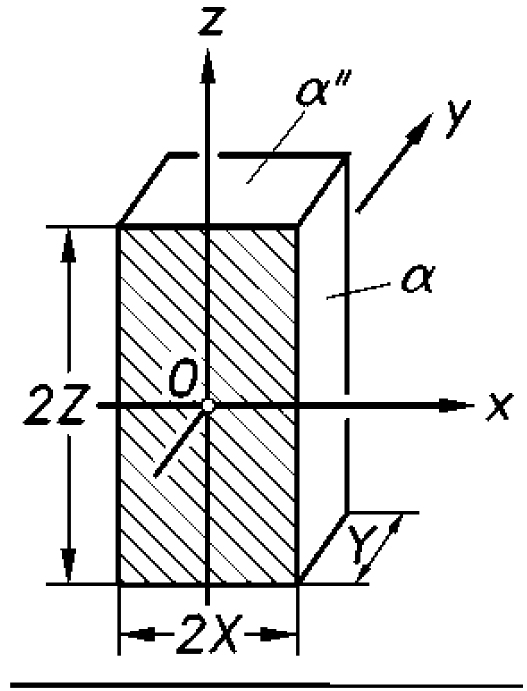
Transitorio multidimensionale



Parallelepipedo che scambia calore da tutte le sei superfici laterali

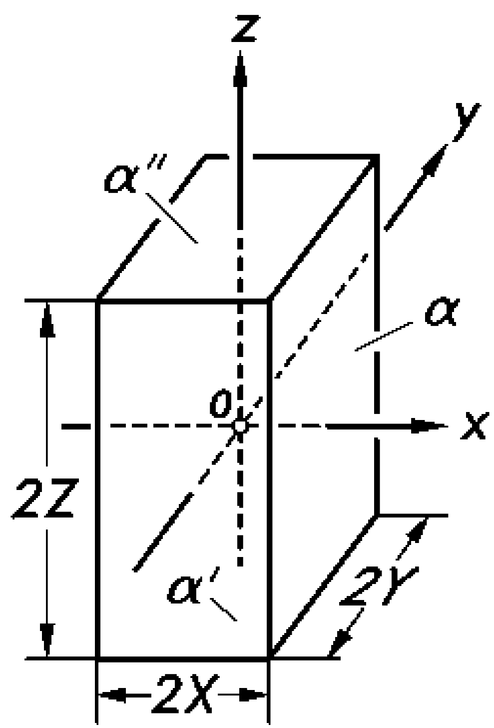


Cilindro che scambia calore da tutte le tre superfici laterali



Parallelepipedo con due superfici adiabatiche (o barretta rettangolare infinita

Transitorio multidimensionale



Parallelepipedo che scambia calore da tutte le sei superfici laterali

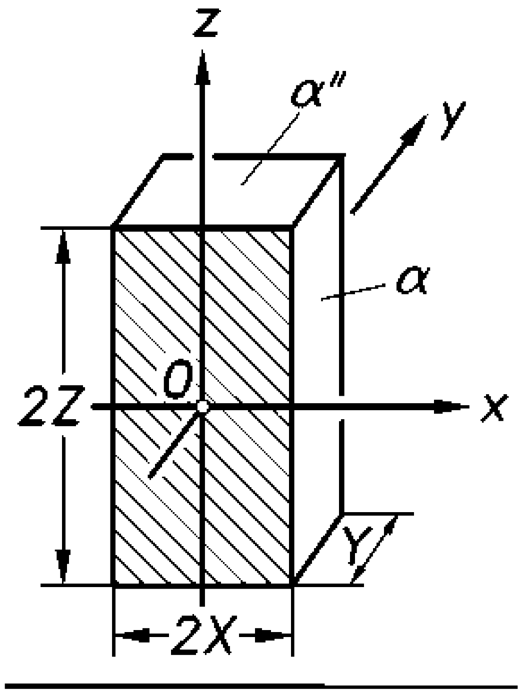
Soluzioni per lastre finite solo nelle direzioni

x y z

$$\vartheta = \frac{T - T_S}{T_0 - T_S} = \vartheta_{Pl}\left(\frac{x}{X}, \frac{at}{X^2}, \frac{hX}{\lambda}\right) \cdot \vartheta_{Pl}\left(\frac{y}{Y}, \frac{at}{Y^2}, \frac{h'Y}{\lambda}\right) \cdot \vartheta_{Pl}\left(\frac{z}{Z}, \frac{at}{Z^2}, \frac{h''Z}{\lambda}\right)$$

h, h' e h'' sono i coefficienti di scambio su ciascuna superficie, T_0 è la temperatura iniziale, T_S è la temperatura esterna

Transitorio multidimensionale



Parallelepipedo con due superfici adiabatiche (o barretta rettangolare infinita

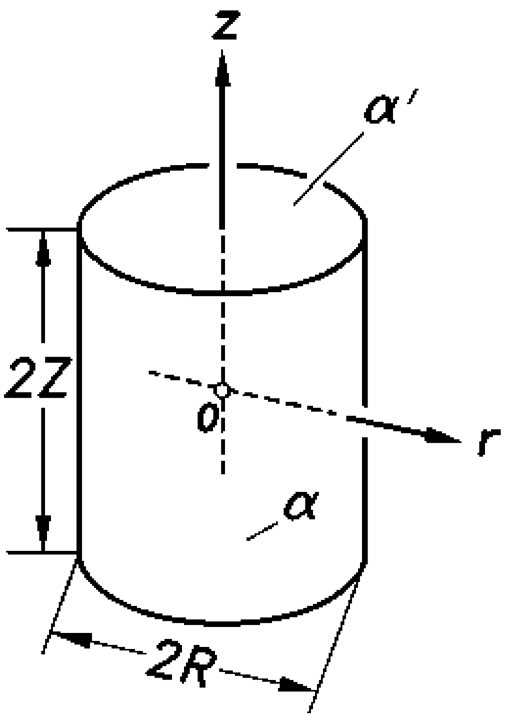
Soluzioni per lastre finite solo nelle direzioni

x y

$$\vartheta = \frac{\mathrm{T}-\mathrm{T_S}}{\mathrm{T_0}-\mathrm{T_S}} = \vartheta_{\mathrm{Pl}}\left(\frac{x}{X}, \frac{at}{X^2}, \frac{\mathrm{h}X}{\lambda}\right)\cdot\vartheta_{\mathrm{Pl}}\left(\frac{y}{Y}, \frac{at}{Y^2}, \frac{\mathrm{h}'Y}{\lambda}\right)$$

h, e h' sono i coefficienti di scambio su ciascuna superficie, T_0 è la temperatura iniziale, T_S è la temperatura esterna

Transitorio multidimensionale



Cilindro che scambia calore da tutte le tre superfici laterali

Soluzione per cilindro infinitamente lungo

Soluzione per lastra finita solo nella direzione z

$$\vartheta = \frac{T - T_S}{T_0 - T_S} = \vartheta_{Cy}^{+}\left(\frac{r}{R}, \frac{at}{R^2}, \frac{hR}{\lambda}\right) \cdot \vartheta_{Pl}\left(\frac{z}{Z}, \frac{at}{Z^2}, \frac{h'Z}{\lambda}\right)$$

h, e h' sono i coefficienti di scambio su ciascuna superficie, T_0 è la temperatura iniziale, T_S è la temperatura esterna