

Lo strato limite di temperatura e concentrazione

Fenomeni di Trasporto

Strato limite di velocità e di temperatura su un oggetto solido equazioni di bilancio

$$\begin{array}{l}
 \text{continuità} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\
 \text{q. di moto lungo x} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 \text{q. di moto lungo y} \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 \text{energia} \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\
 \text{materia} \quad u \frac{\partial C_A}{\partial x} + v \frac{\partial C_A}{\partial y} = \mathcal{D} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} \right)
 \end{array}$$

Condizioni al contorno

$$u = v = 0; \quad T = T_0; \quad C_A = C_{A0} \quad \text{per } y = 0$$

$$u = U; \quad v = 0; \quad p = P; \quad T = T_\infty; \quad C_A = C_{A\infty} \quad \text{per } y \rightarrow \infty \text{ e per } x = 0$$

Strato limite di velocità e di temperatura su un oggetto solido equazioni di bilancio

continuità $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\tilde{u} = \frac{u}{U}$ q. di moto lungo x

$$u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}$$

$\tilde{T} = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}$ energia

$$u \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2}$$

$\tilde{C}_A = \frac{C_A - C_{A0}}{C_{A\infty} - C_{A0}}$ materia

$$u \frac{\partial \tilde{C}_A}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{C}_A}{\partial y} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 \tilde{C}_A}{\partial y^2}$$

Condizioni al contorno: $\begin{cases} \tilde{u} = \tilde{T} = \tilde{C}_A = 0 & \text{per } y = 0 \\ \tilde{u} = \tilde{T} = \tilde{C}_A = 1 & \text{per } y \rightarrow \infty \text{ e per } x = 0 \end{cases}$

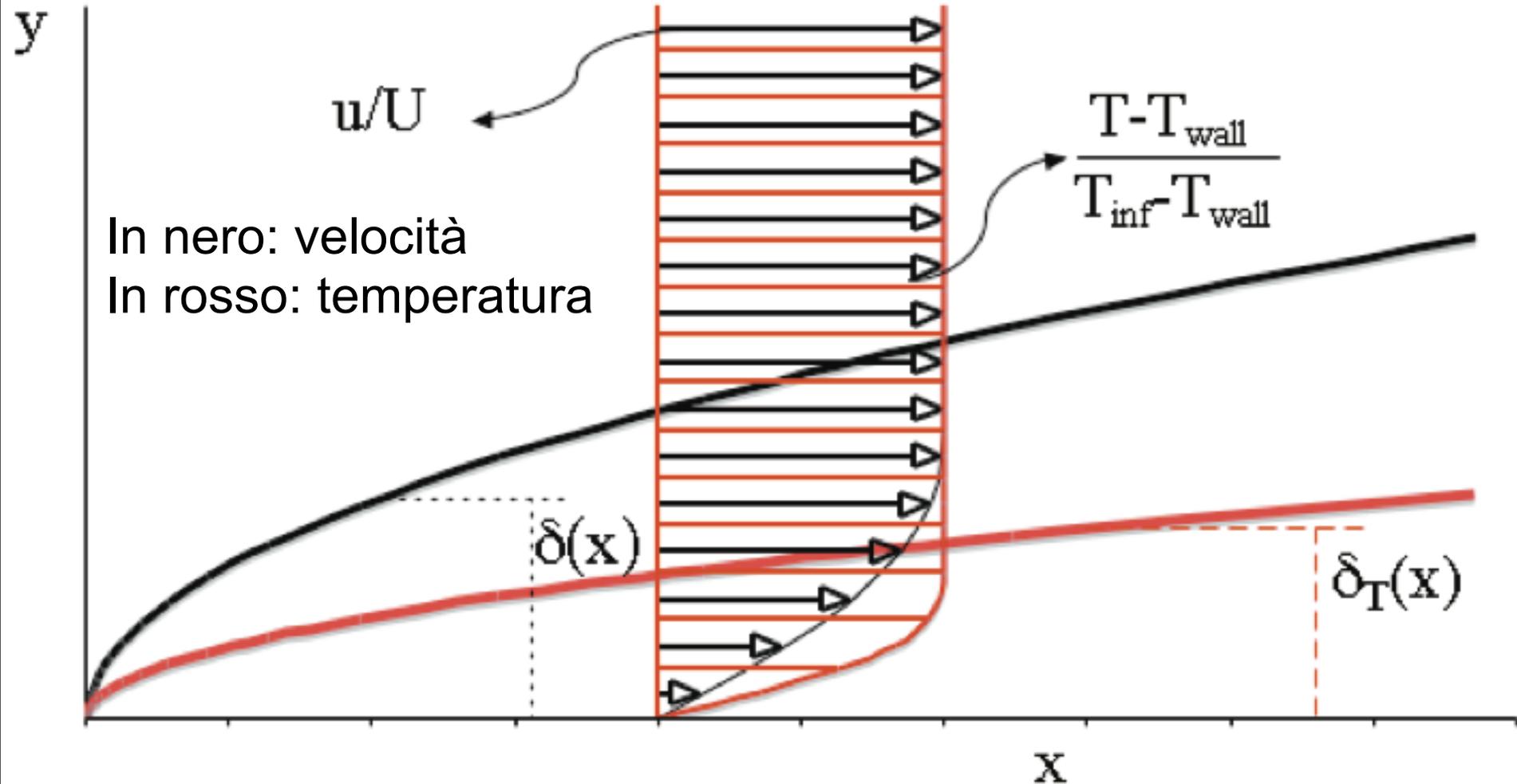
Nota: se $\alpha = \nu = \mathcal{D}$, ossia $Pr = Sc = 1$,

le equazioni sono identiche: $\tilde{u} = \tilde{T} = \tilde{C}_A$

Strato limite di velocità e di temperatura su un oggetto solido

$Pr > 1$

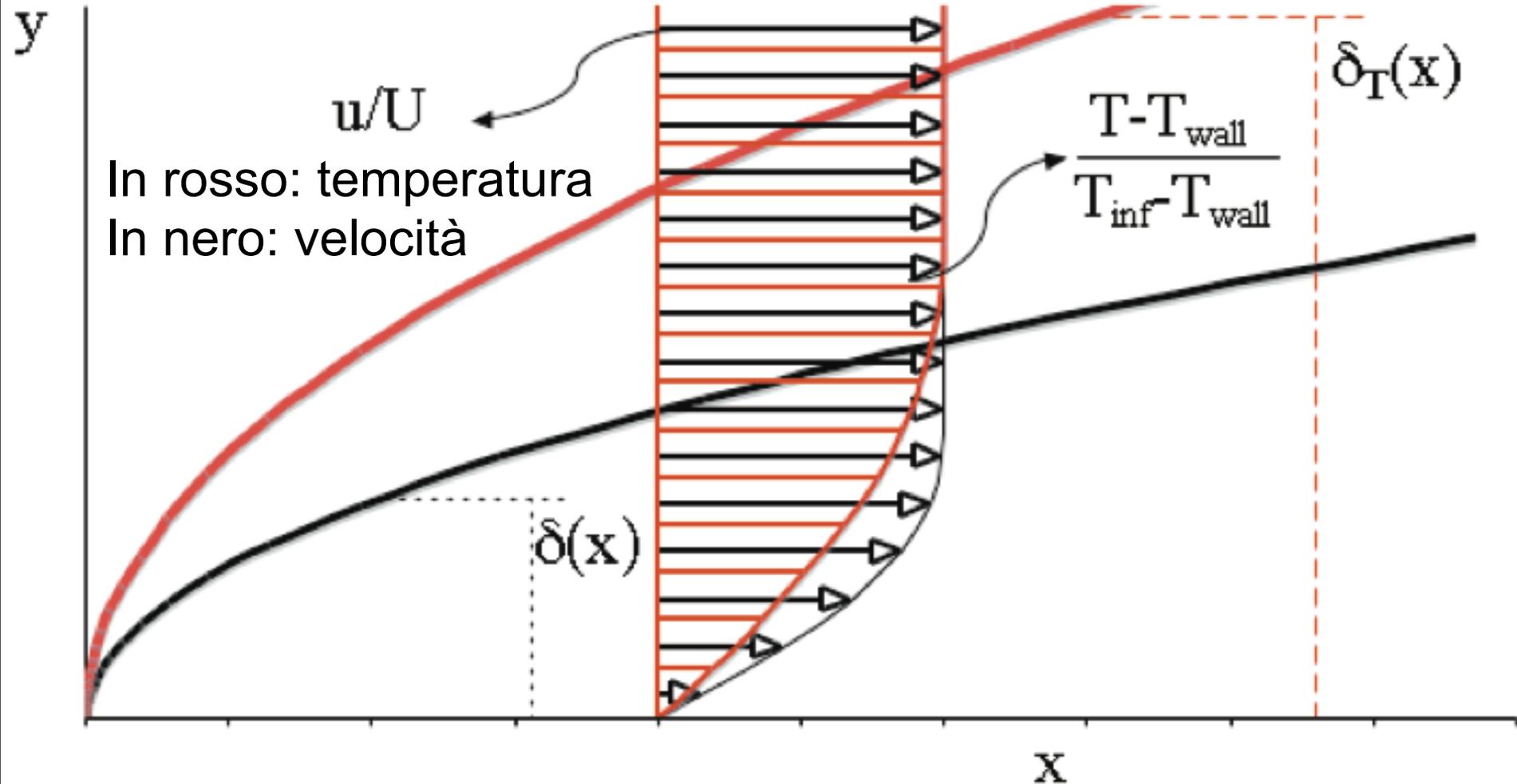
Per lo strato limite di concentrazione il ragionamento va fatto su Sc



Strato limite di velocità e di temperatura su un oggetto solido

$Pr < 1$

Per lo strato limite di concentrazione il ragionamento va fatto su Sc



Strato limite di velocità e di temperatura su un oggetto solido

Nota: se $\alpha = \nu = \mathcal{D}$, ossia $Pr = Sc = 1$: $\tilde{u} = \tilde{T} = \tilde{C}_A$

se $\alpha \neq \nu \neq \mathcal{D}$, ossia $Pr \neq Sc \neq 1$:

$$\tilde{u} = \frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\tilde{T} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = f\left(\frac{y}{\delta_T}\right)$$

$$\tilde{C}_A = \frac{C_A - C_{A0}}{C_{A\infty} - C_{A0}} = f\left(\frac{y}{\delta_C}\right)$$

f è la stessa funzione

ossia i profili di velocità, temperatura e concentrazione
(adimensionali) sono simili

Strato limite di velocità su un oggetto solido

richiami

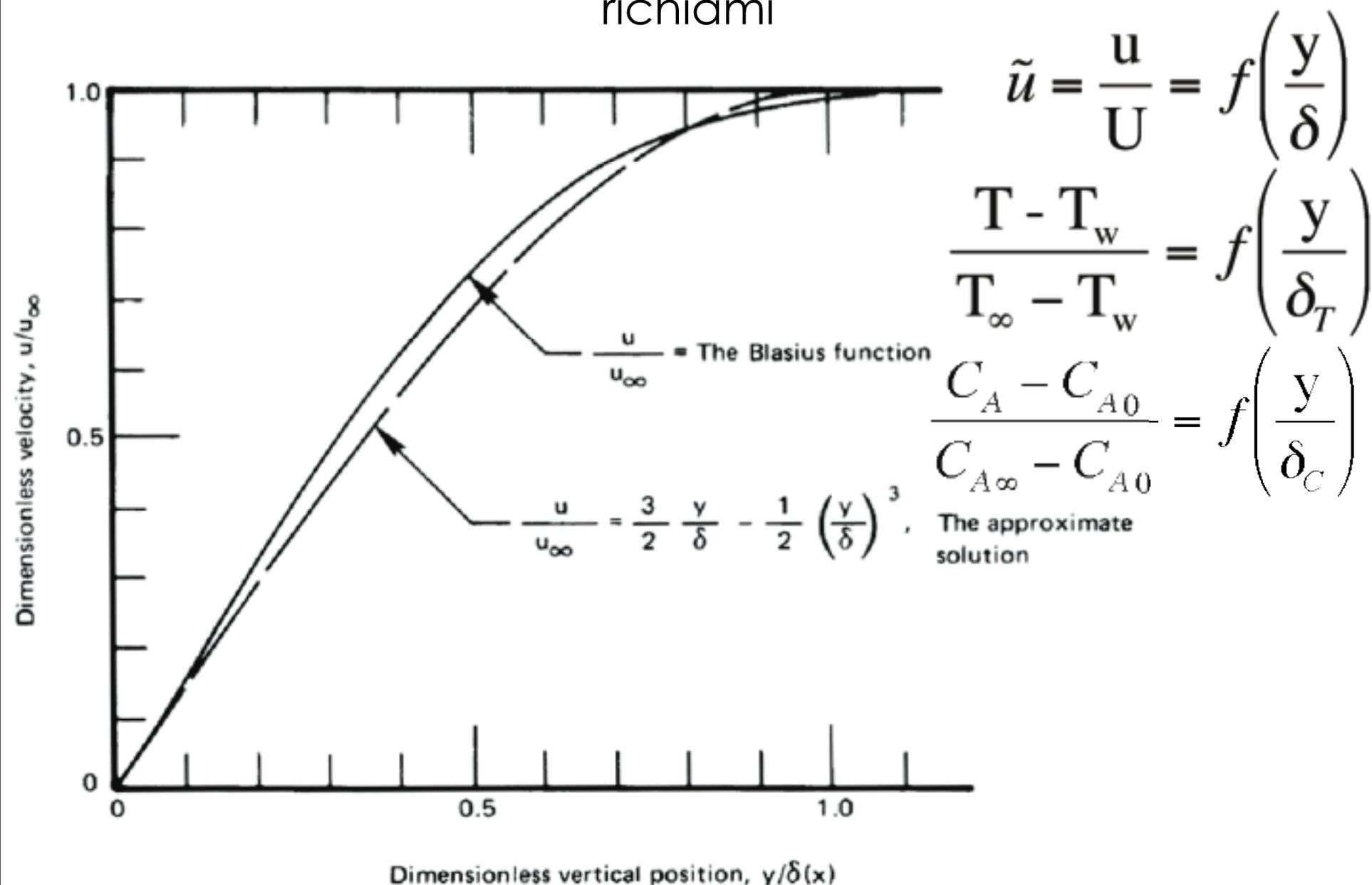
Analisi degli ordini di grandezza:

$$\delta \approx \sqrt{vx/U} \Leftrightarrow \frac{\delta}{x} \approx \frac{1}{\text{Re}_x^{1/2}}$$
$$\tau_{.xy} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \approx \mu \frac{U}{\delta} = \rho U^2 \sqrt{\frac{v}{Ux}} = \rho U^2 \text{Re}_x^{-1/2}$$
$$f = \frac{\tau_{.xy}}{\frac{1}{2} \rho U^2} \approx \text{Re}_x^{-1/2}$$

Soluzione esatta:

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{vx}{U}} \quad (\text{distanza a cui } u=0.99U)$$
$$u(\eta) = U \left[0.332\eta - 0.0023\eta^4 + O(\eta^7) \right]$$
$$\eta = y \left(\frac{U}{xv} \right)^{1/2} \quad v(\eta) = \sqrt{\frac{vU}{x}} \left[0.083\eta^2 + O(\eta^5) \right]$$
$$\tau_{.xy}(x) = 0.332 \rho U^2 \text{Re}_x^{-1/2}$$
$$f(x) = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2}$$

Strato limite di velocità su un oggetto solido richiami



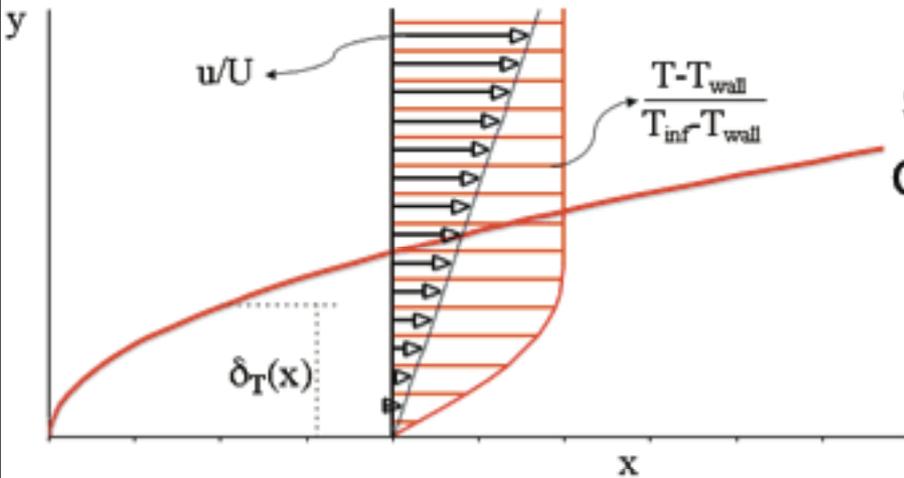
Analisi dello spessore dello strato limite di temperatura e concentrazione: coefficienti di scambio termico e di materia all'interfaccia solido-fluido

Nel seguito analizzeremo il solo strato limite termico:

per lo strato limite massico, o di concentrazione, il ragionamento è identico, salvo sostituire

- alle temperature le concentrazioni,
- alla diffusività termica quella di materia,
- al numero di Nusselt (**Nu**) quello di Sherwood (**Sh**),
- al numero di Prandtl (**Pr**) quello di Schmidt (**Sc**),
- al numero di Peclet (**Pe**) termico quello massico (**Pe_M**)

Analisi dello spessore dello strato limite di temperatura: caso di profilo di vel. lineare



Se lo strato limite di velocità si sviluppa fino a spessori dell'ordine della dimensione dell'oggetto, $\delta \approx L$

L è una dimensione caratteristica dell'oggetto

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{U \delta_T \Delta T}{L^2} \approx \frac{\alpha \Delta T}{\delta_T^2}$$

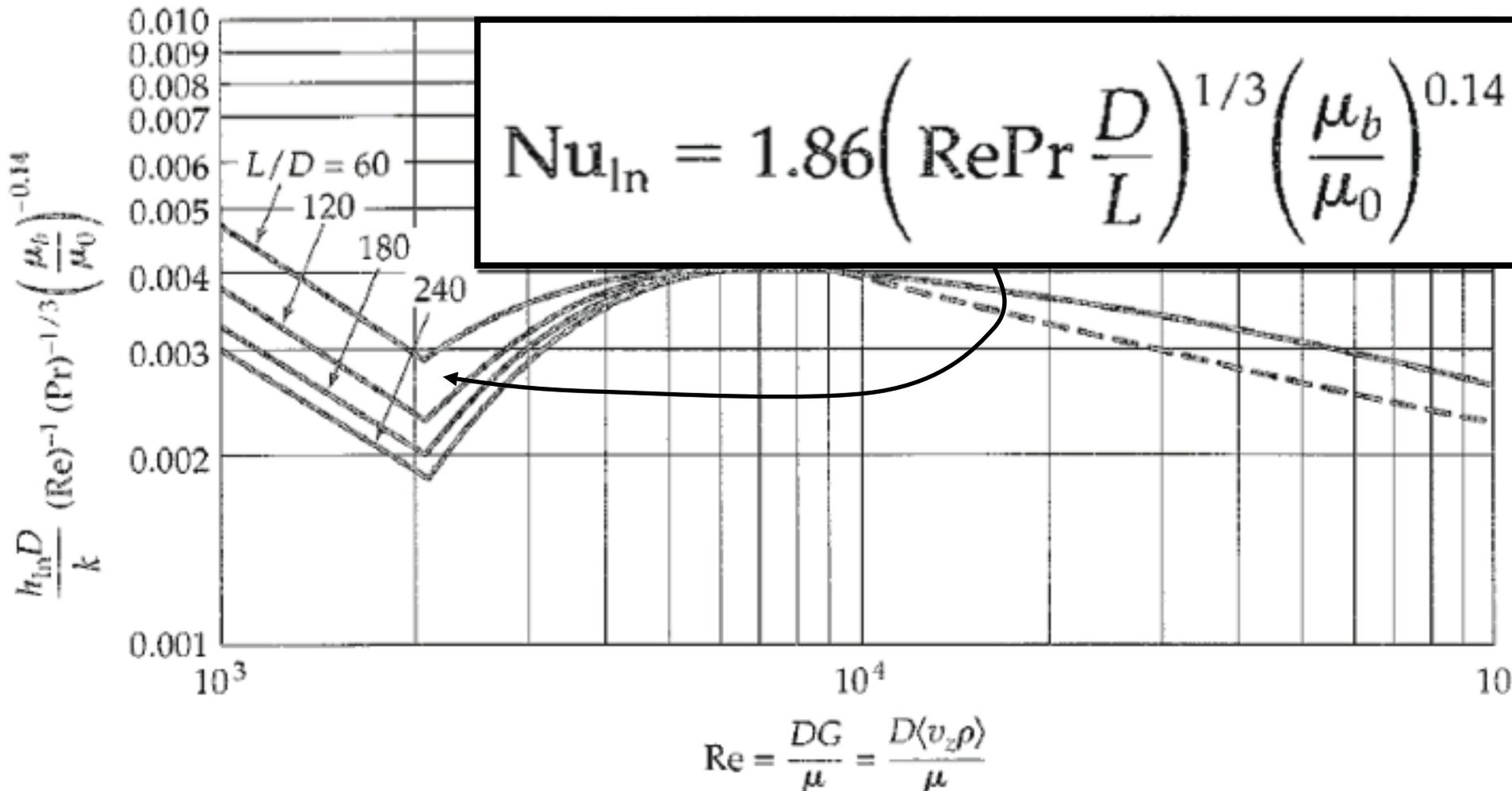
$$\delta_T / L \approx Pe^{-1/3} = Re^{-1/3} Pr^{-1/3}$$

$$Nu \approx L / \delta_T \approx Pe^{1/3} \approx Re^{1/3} Pr^{1/3}$$

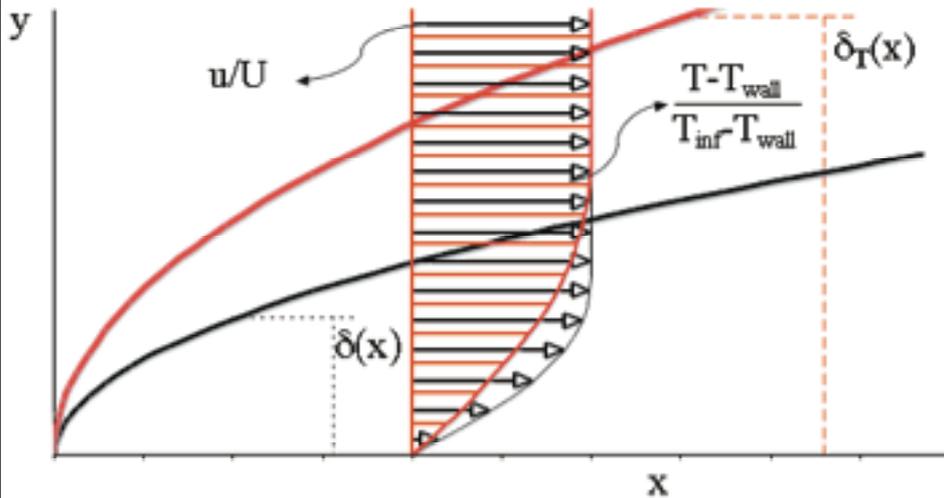
Oss.: questo caso si verifica ad esempio nella zona di imbocco termico nei condotti

Analisi dello spessore dello strato limite di temperatura : caso di profilo di vel. lineare

$$Nu \approx L / \delta_T \approx Pe^{1/3} \approx Re^{1/3} Pr^{1/3}$$



Analisi dello spessore dello strato limite di temperatura: caso per $Pr \ll 1$ (metalli liquidi)



Ipotizziamo $\delta_T \gg \delta$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

L è una dimensione caratteristica dell'oggetto

$$\frac{U \Delta T}{L} \approx \frac{\alpha \Delta T}{\delta_T^2}$$

$$\delta_T / L \approx Pe^{-1/2} = Re^{-1/2} Pr^{-1/2}$$

$$Nu \approx L / \delta_T \approx Pe^{1/2} = Re^{1/2} Pr^{1/2}$$

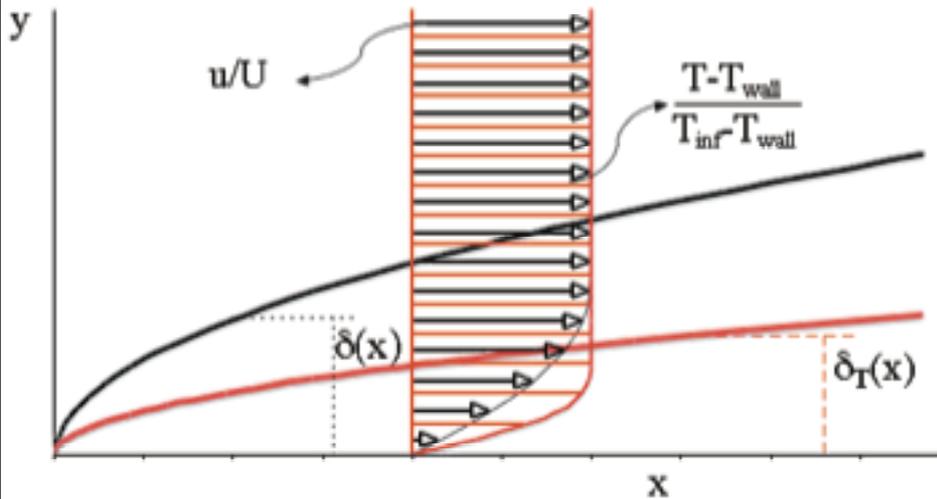
Oss.: $\delta_T / L \approx \delta / L Pr^{-1/2}$ a conferma dell'ipotesi

Analisi dello spessore dello strato limite di temperatura: caso per $Pr \ll 1$ (metalli liquidi)

$$Nu \approx L / \delta_T \approx Pe^{1/2} = Re^{1/2} Pr^{1/2}$$

Correlation	Flow regime	Remarks
$Nu_x = 0.564 Pe_x^{1/2}$ (local)	Laminar	Flow over a flat plate, constant wall temperatures $Pr \ll 1$
$Nu_x = 0.332 Pr^{1/3} Re_x^{1/2}$ (local)	Laminar	Flow over a flat plate, constant wall temperature,
$St_x Pr^{2/3} = 0.0296 Re_x^{-0.2}$ (local)	Turbulent	Flow over a flat plate for $5 \times 10^5 < Re_x < 10^7$ $Re_x \leq 5 \times 10^5; 0.6 < Pr < 10$
$Nu_x = 0.339 Pr^{1/3} Re_x^{1/2}$ (local)	Laminar	Flow over a flat plate, constant wall temperature, $Re_x \leq 5 \times 10^5, Pr \gg 1$
$Nu_m = 0.664 Pr^{1/3} Re_L^{1/2}$ (average)	Laminar	Flow over a flat plate, constant wall temperature, $Re_L \leq 5 \times 10^5; 0.6 < Pr < 10$

Analisi dello spessore dello strato limite di temperatura: caso per $Pr \gg 1$



Ipotizziamo $\delta_T \ll \delta$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{U \delta_T \Delta T}{L \delta} \approx \frac{\alpha \Delta T}{\delta_T^2}$$

L è una dimensione caratteristica dell'oggetto

$$\delta_T / L \approx Re^{-1/6} Pe^{-1/3} = Re^{-1/2} Pr^{-1/3}$$

$$Nu \approx L / \delta_T \approx Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

Oss.: $\delta_T / L \approx \delta / L Pr^{-1/3}$ a conferma dell'ipotesi

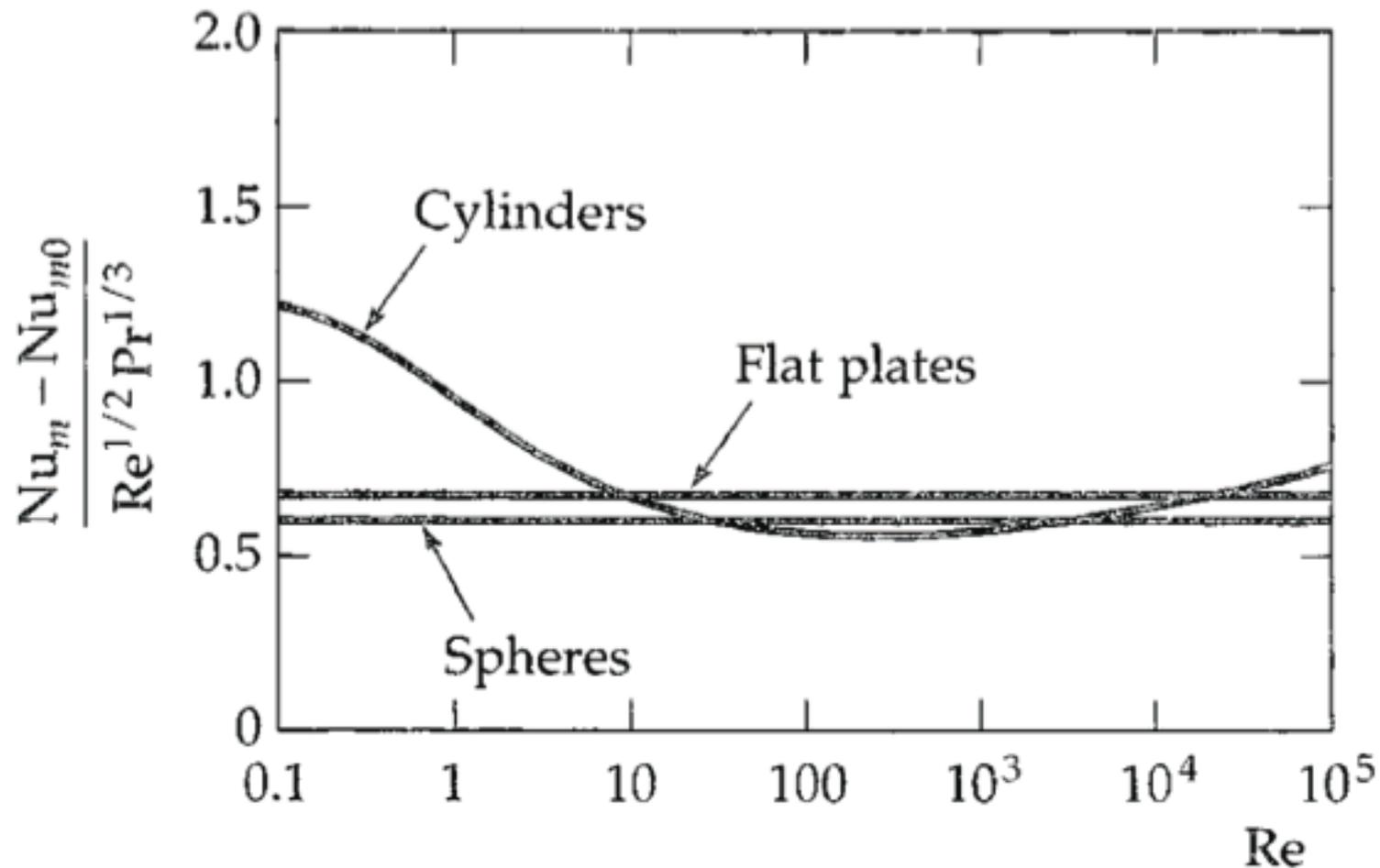
Analisi dello spessore dello strato limite di temperatura: caso per $Pr \gg 1$

$$Nu \approx L / \delta_T \approx Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

Correlation	Flow regime	Remarks
$Nu_x = 0.564 Pe_x^{1/2}$ (local)	Laminar	Flow over a flat plate, constant wall temperatures, $Pr < 1$
$Nu_x = 0.332 Pr^{1/3} Re_x^{1/2}$ (local)	Laminar	Flow over a flat plate, constant wall temperature,
$St_x Pr^{2/3} = 0.0296 Re_x^{-1/2}$ (local)	Turbulent	Flow over a flat plate for $5 \times 10^5 < Re_x < 10^7$ $Re_x \leq 5 \times 10^5; 0.6 < Pr < 10$
$Nu_x = 0.339 Pr^{1/3} Re_x^{1/2}$ (local)	Laminar	Flow over a flat plate, constant wall temperature, $Re_x \leq 5 \times 10^5, Pr \gg 1$
$Nu_m = 0.664 Pr^{1/3} Re_L^{1/2}$ (average)	Laminar	Flow over a flat plate, constant wall temperature, $Re_L \leq 5 \times 10^5; 0.6 < Pr < 10$

Analisi dello spessore dello strato limite di temperatura: caso per $Pr \gg 1$

$$Nu \approx L / \delta_T \approx Re^{1/2} Pr^{1/3}$$



Analogia di Colburn

Coeff. scambio termico: $h = \frac{q_w}{\Delta T}$

Flusso alla parete: $q_w = \frac{k \Delta T}{a \delta_T}$

Numero di Nusselt: $Nu = \frac{h L}{k} = \frac{L}{a \delta_T}$

Fattore di attrito: $\frac{1}{2} f = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$

Sforzo alla parete: $\tau_w = \frac{\mu U}{b \delta}$

a è una costante che dipende dalla forma del profilo di Temp adimensionale

Trascuriamo gli effetti dovuti al gradiente di pressione!!

b è una costante che dipende dalla forma del profilo di vel adimensionale (dalla soluzione esatta $b \cong 0.67$)

Analogia di Colburn

Numero di Nusselt: $Nu = \frac{h L}{k} = \frac{L}{a \delta_T}$

Fattore di attrito: $\frac{1}{2} f = \frac{\mu}{\rho U b \delta}$

Se i profili sono simili, $a=b$

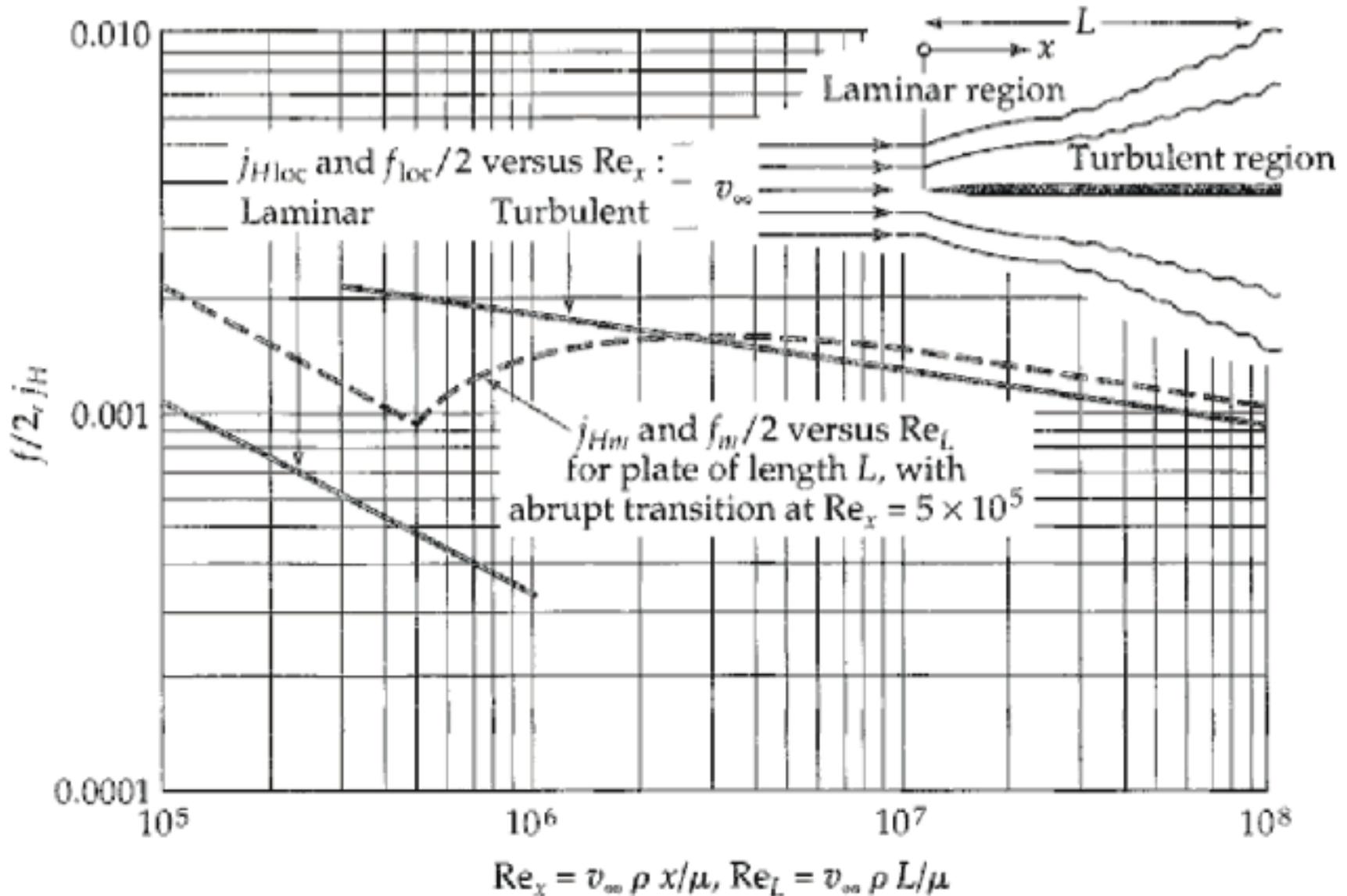
$$\frac{1}{2} f = \frac{\mu Nu \delta_T}{\rho U \delta L} = \frac{Nu \delta_T}{Re \delta}$$

Se $\delta_T = \delta Pr^{-1/3}$ $\frac{1}{2} f = \frac{Nu}{Re Pr^{1/3}} = j_H$ *fattore di Colburn*

Analogia di Colburn

Moto su lastra piana: analogia stretta

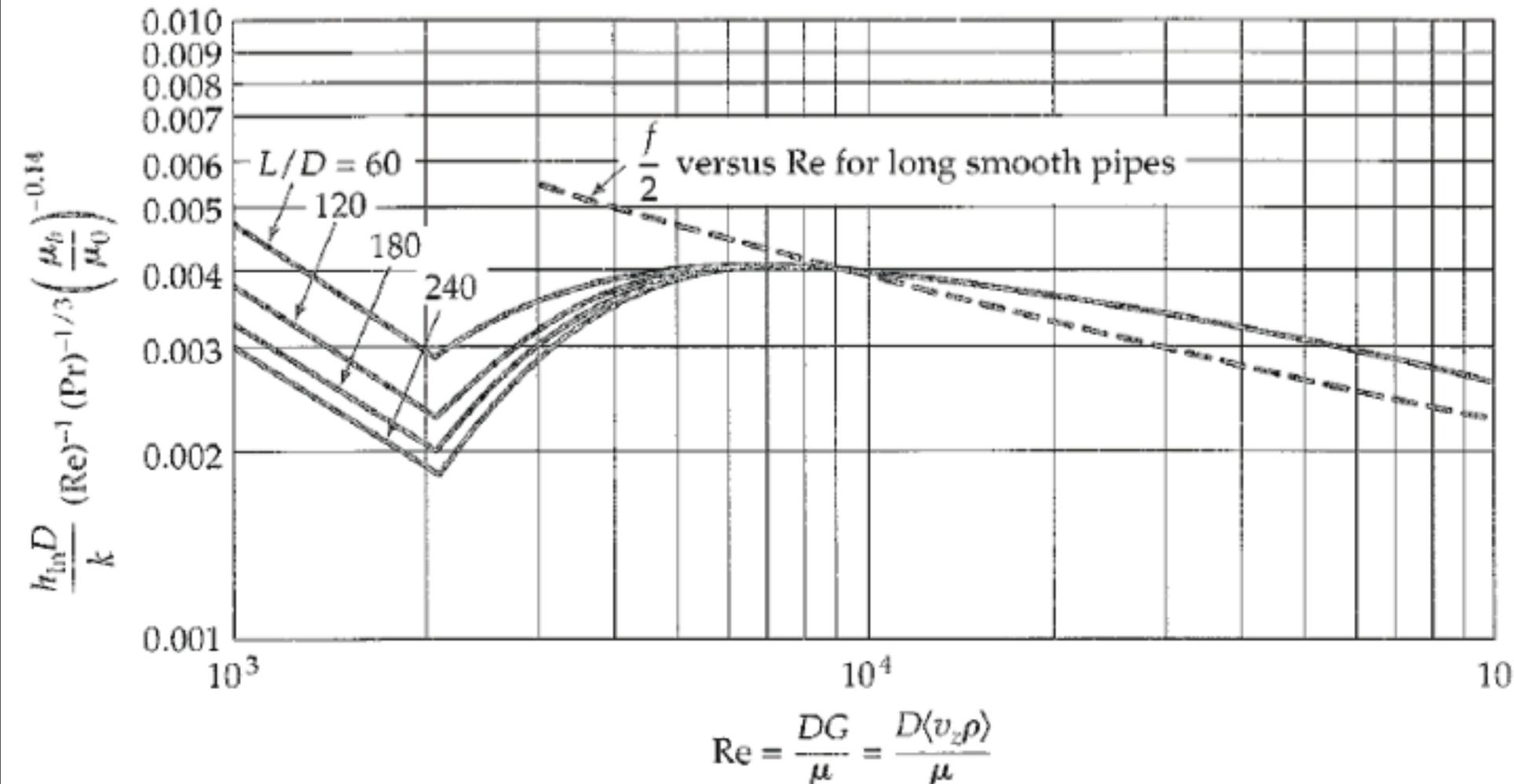
$$\frac{1}{2} f = j_H$$



Analogia di Colburn

Moto in condotti ($Re > 10'000$)

$$\frac{1}{2} f = j_H$$



Analogia di Colburn

Moto su oggetti: l'analogia non vale

$$\frac{1}{2} f = j_H$$

