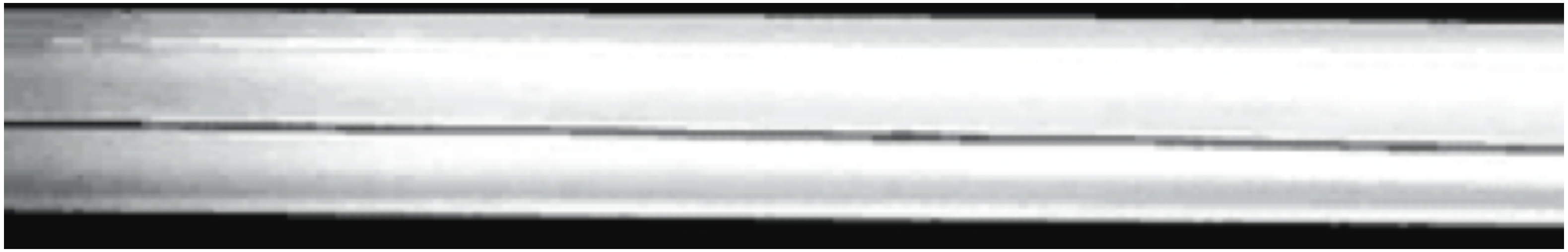
Fenomeni di trasporto in moto turbolento

Fenomeni di Trasporto

Fenomeni di trasporto in moto turbolento

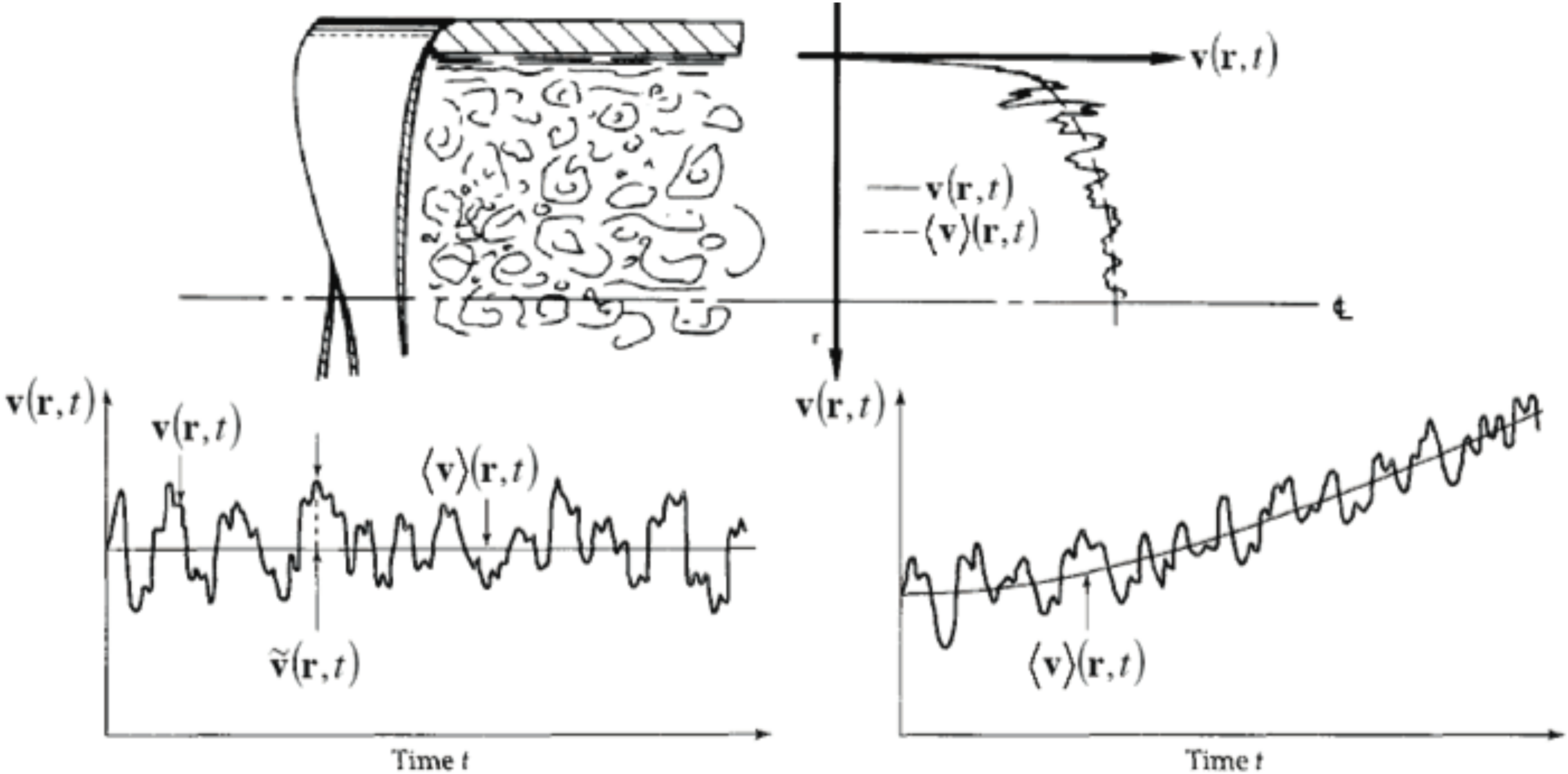


Un tracciante viene iniettato in una corrente di acqua in moto laminare (Re <2100)

All'aumentare del Reynolds iniziano delle fluttuazioni.

A Re>4000 il moto diventa pienamente turbolento e il tracciante diffonde perpendicolarmente al moto

Grandezze medie e fluttuazioni



$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + \widetilde{\mathbf{v}}; \quad p = \langle p \rangle + \widetilde{p}; \quad T = \langle T \rangle + \widetilde{T}; \quad c = \langle c \rangle + \widetilde{c}$$

$$\langle f \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\tau} \int_{t-\tau}^{t+\tau} f(\mathbf{r}, t')\,dt' \qquad \langle \widetilde{f} \rangle = 0$$

Proprietà della media

Mediare due volte equivale a mediare una volta sola

$$\langle\langle f\rangle\rangle = \langle f\rangle$$

Infatti: $\langle f\rangle = \langle\langle f\rangle + \tilde{f}\rangle = \langle\langle f\rangle\rangle + \langle\tilde{f}\rangle = \langle\langle f\rangle\rangle$

Le medie delle derivate spaziali e temporali sono uguali alle derivate della media

$$\langle\nabla f\rangle = \nabla\langle f\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle\frac{df}{dt}\right\rangle = \frac{d}{dt}\langle f\rangle$$

Per le derivate spaziali la dimostrazione è facile:

$$\langle\nabla f\rangle(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\tau}\int_{t-\tau}^{t+\tau}\nabla f(\mathbf{r},t')dt' = \frac{1}{2\tau}\nabla\int_{t-\tau}^{t+\tau} f(\mathbf{r},t')dt' = \nabla\langle f\rangle$$

Per la derivata temporale la dimostrazione è più difficile, ma funziona lo stesso:

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle = \frac{1}{2\tau}\int_{t-\tau}^{t+\tau}\frac{\partial f(\mathbf{r},t')}{\partial t'}dt' = \frac{1}{2\tau}\left(f(\mathbf{r},t+\tau) - f(\mathbf{r},t-\tau)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle f\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\tau}\int_{t-\tau}^{t+\tau} f(\mathbf{r},t')dt' = \frac{1}{2\tau}\left(f(\mathbf{r},t+\tau) - f(\mathbf{r},t-\tau)\right)$$

Oss.: Regola di Leibnitz $\displaystyle\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t)}^{b(t)} h(x,s)ds = h(x,b(t))\frac{\partial b(t)}{\partial t} - h(x,a(t))\frac{\partial a(t)}{\partial t}$

Conservazione dell'energia

Equazione dell'energia per un fluido incomprimibile

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{v}T)\right)=-\nabla\cdot\mathbf{q}+s$$

Mediando, e considerando che $\langle \mathbf{v}T\rangle = \langle \mathbf{v}\rangle\langle T\rangle + \langle \tilde{\mathbf{v}}\tilde{T}\rangle$

$$\rho c_p\left[\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial t}+\langle \mathbf{v}\rangle\cdot\nabla\langle T\rangle\right]=-\nabla\cdot\left(\langle \mathbf{q}\rangle+\mathbf{q}^*\right)+\langle s\rangle$$

$$\langle \mathbf{q}\rangle = -k\nabla\langle T\rangle$$ Flusso diffusivo medio

$$\mathbf{q}^* = \rho c_p\langle \tilde{\mathbf{v}}\tilde{T}\rangle$$ Flusso termico turbolento

Bilancio delle specie chimiche

Si ottiene, analogamente, per una soluzione con densità costante

$$\frac{\partial \langle c_i \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla \langle c_i \rangle = -\nabla \cdot \left(\langle \mathbf{J}_i \rangle + \mathbf{J}_i^{*} \right) + \langle R_i \rangle$$

$$\langle \mathbf{J}_i \rangle = -D \nabla \langle c_i \rangle$$ Flusso diffusivo medio

$$\mathbf{J}_i^{*} = \langle \tilde{\mathbf{v}} \tilde{c} \rangle$$ Flusso turbolento

I flussi e le diffusività turbolenti

Si introducono dei coefficienti di trasporto turbolento, in analogia con le corrispondenti grandezze relative al moto laminare

$$T_{yz}^{*} = \rho\left\langle \tilde{v}_y \tilde{v}_z \right\rangle = -\rho\varepsilon_Q \frac{\partial \overline{v}_z}{\partial y},$$

ε_Q è la viscosità cinematica turbolenta

$$q_y^{*} = \rho c_p \left\langle \tilde{v}_y \tilde{T} \right\rangle = -\rho c_p \varepsilon_U \frac{\partial \overline{T}}{\partial y},$$

ε_U è la diffusività termica turbolenta

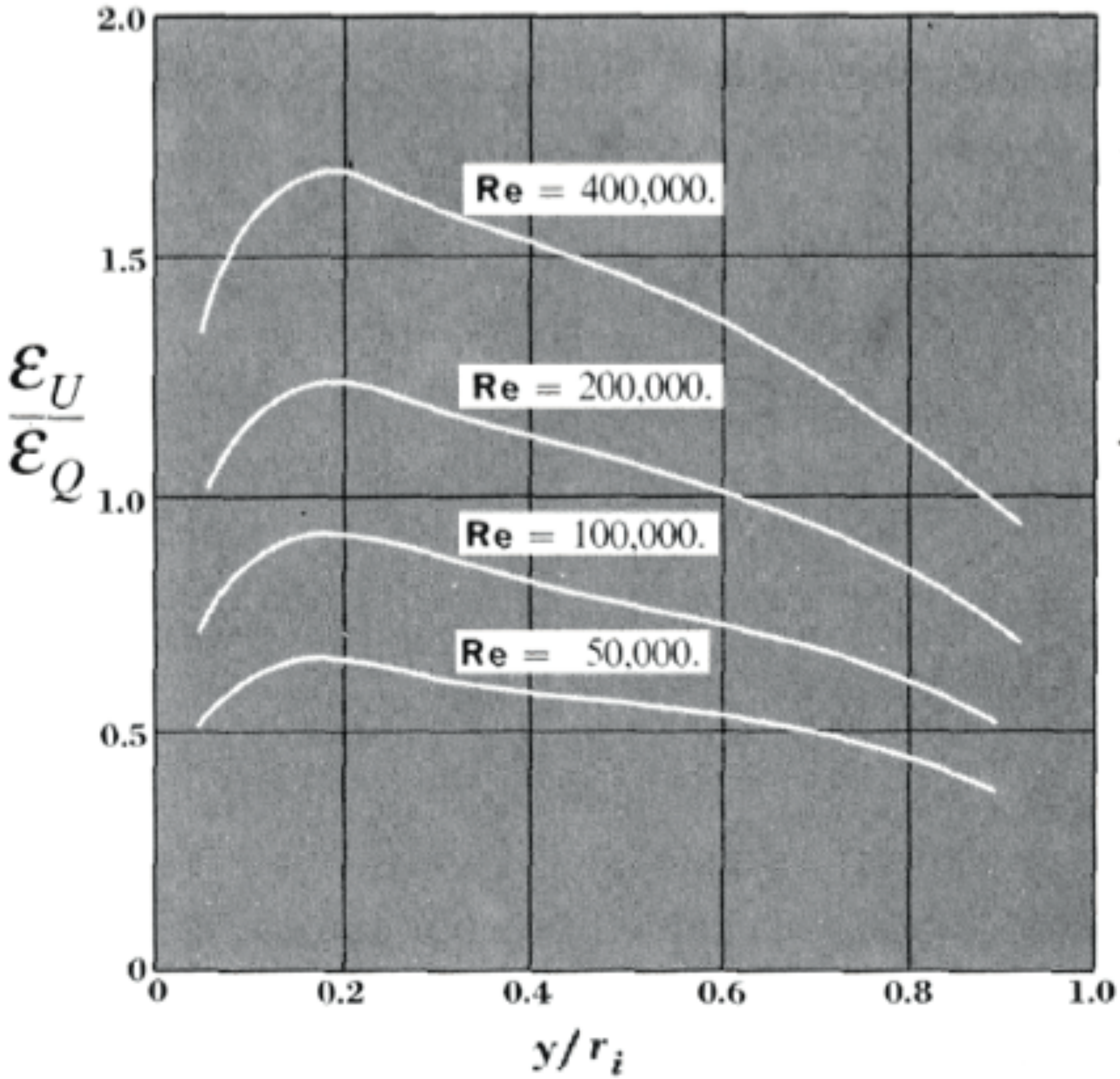
$$J_{iy}^{*} = \left\langle \tilde{v}_y \tilde{c}_i \right\rangle = -\varepsilon_M \frac{\partial \overline{c}_i}{\partial y},$$

ε_M è la diffusività turbolenta

Essendo il meccanismo di trasporto identico, ci si aspetta che

$$\varepsilon_Q = \varepsilon_U = \varepsilon_M$$

Le diffusività turbolente



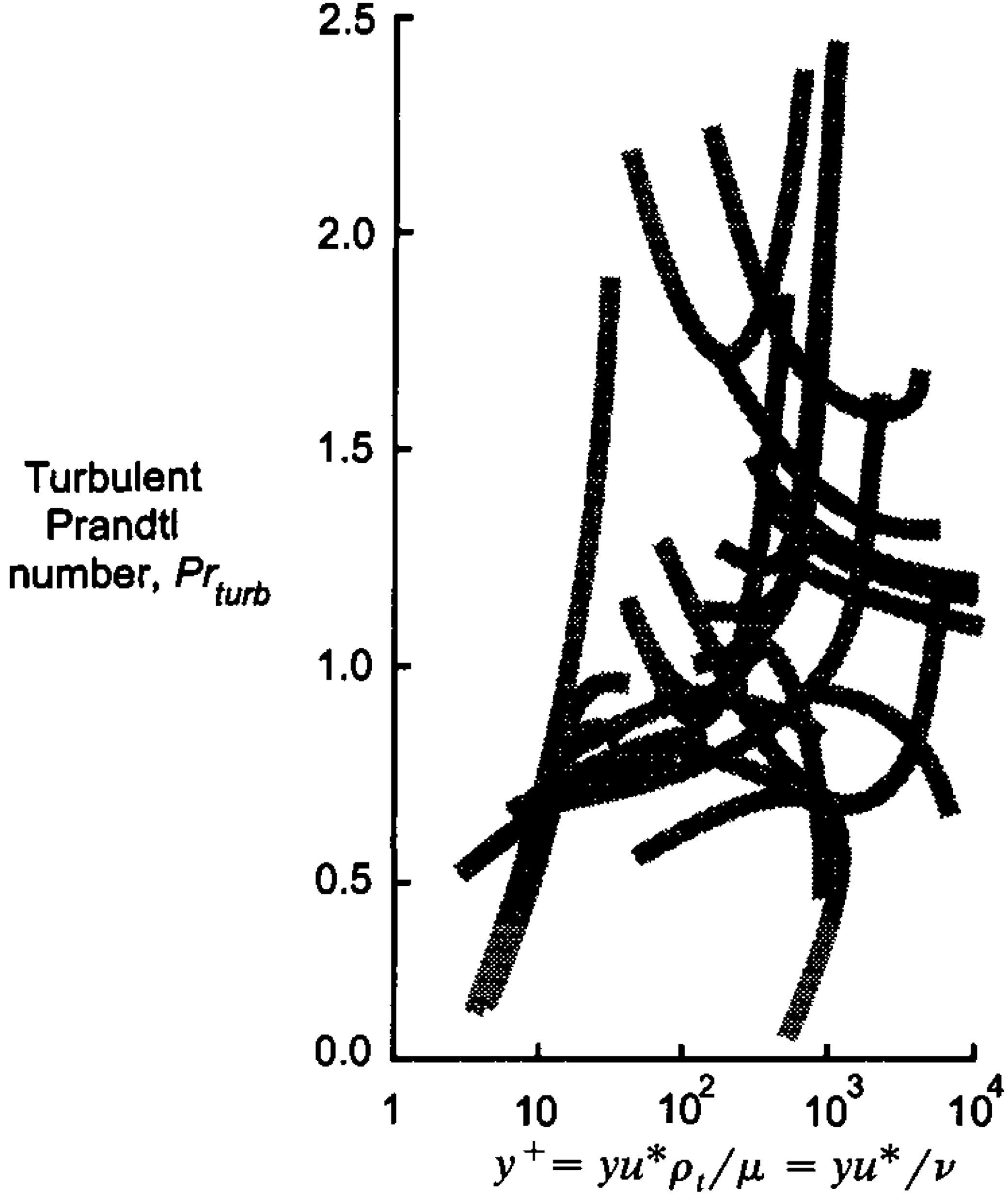
Ratio of turbulent transport coefficients for mercury in a vertical tube. (*From S. E. Isakoff and T. B. Drew, "Proceedings of the General Discussion on Heat Transfer," p. 479, Inst. Mech. Eng. and Am. Soc. Mech. Eng., New York, 1951.*)

$$\frac{\varepsilon_Q}{\varepsilon_U} =$$ Numero di Prandtl Turbolento

$$\frac{\varepsilon_Q}{\varepsilon_M} =$$ Numero di Schmidt Turbolento

L'ipotesi di uguaglianza delle diffusività turbolente prende il nome di *Analogia di Reynolds*

Le diffusività turbolente



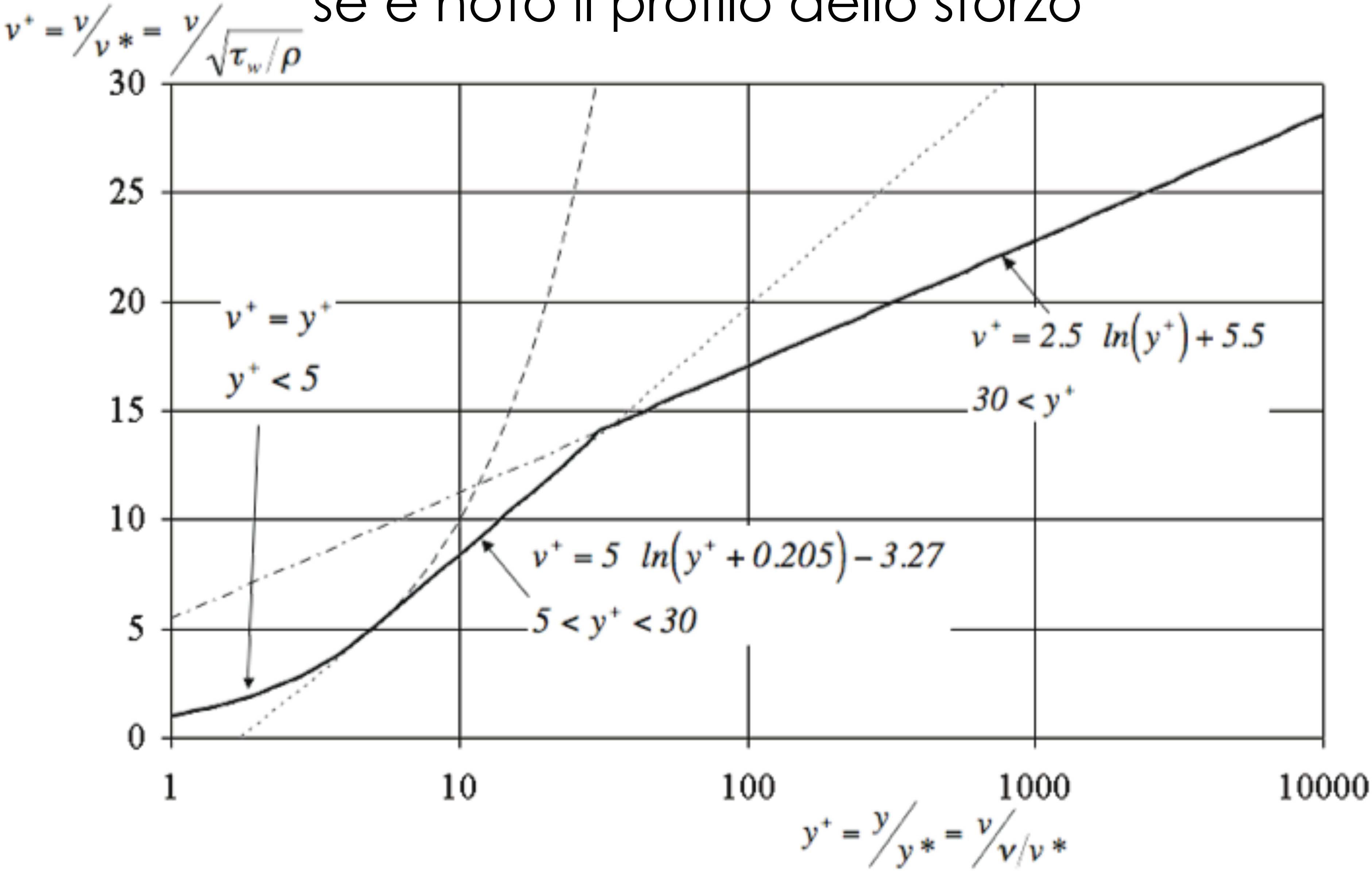
$$\frac{\varepsilon_Q}{\varepsilon_U} =$$ Numero di Prandtl Turbolento

$$\frac{\varepsilon_Q}{\varepsilon_M} =$$ Numero di Schmidt Turbolento

L'ipotesi di uguaglianza delle diffusività turbolente prende il nome di *Analogia di Reynolds*

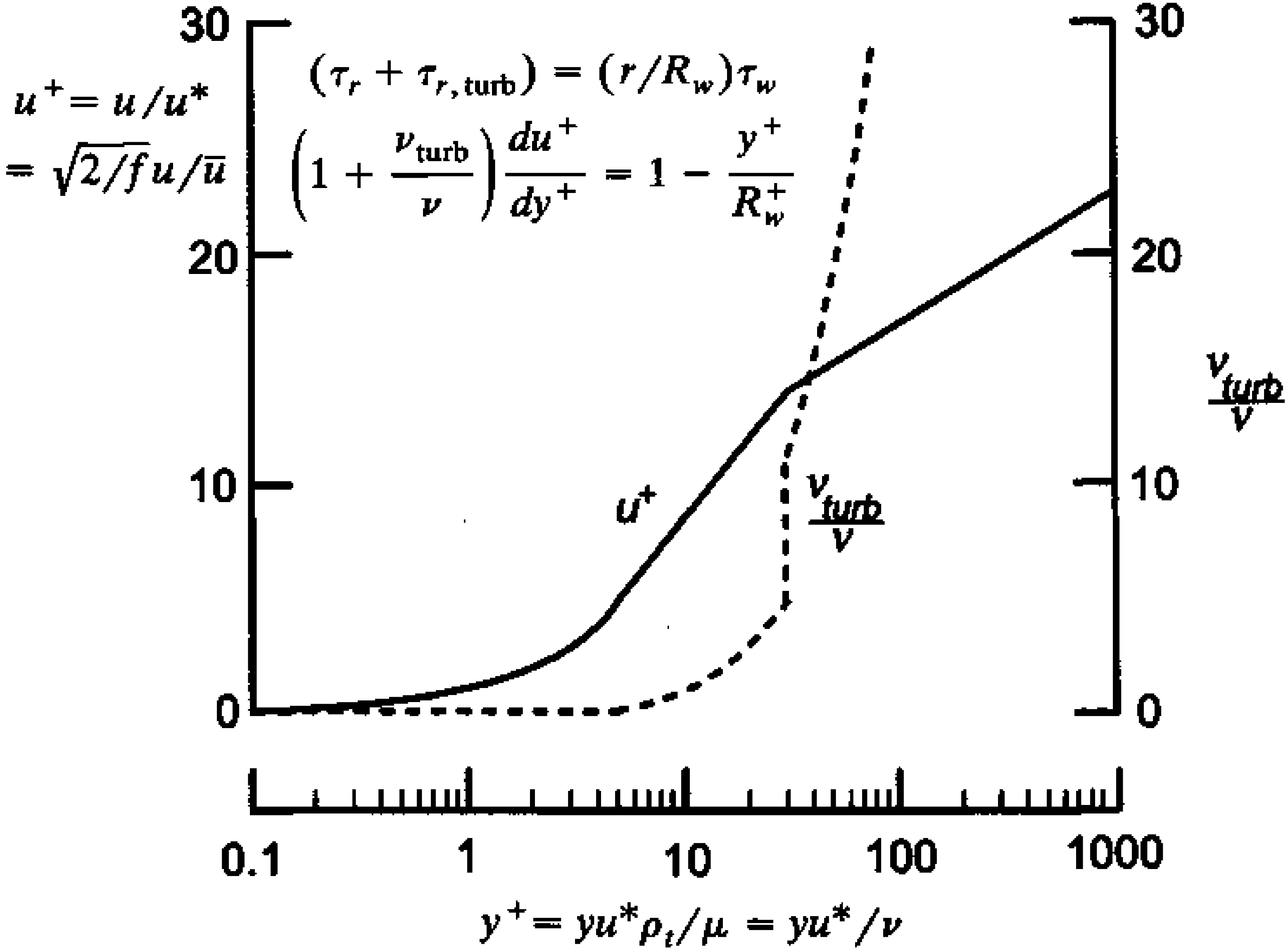
Il profilo universale di velocità consente di calcolare le diffusività

se è noto il profilo dello sforzo

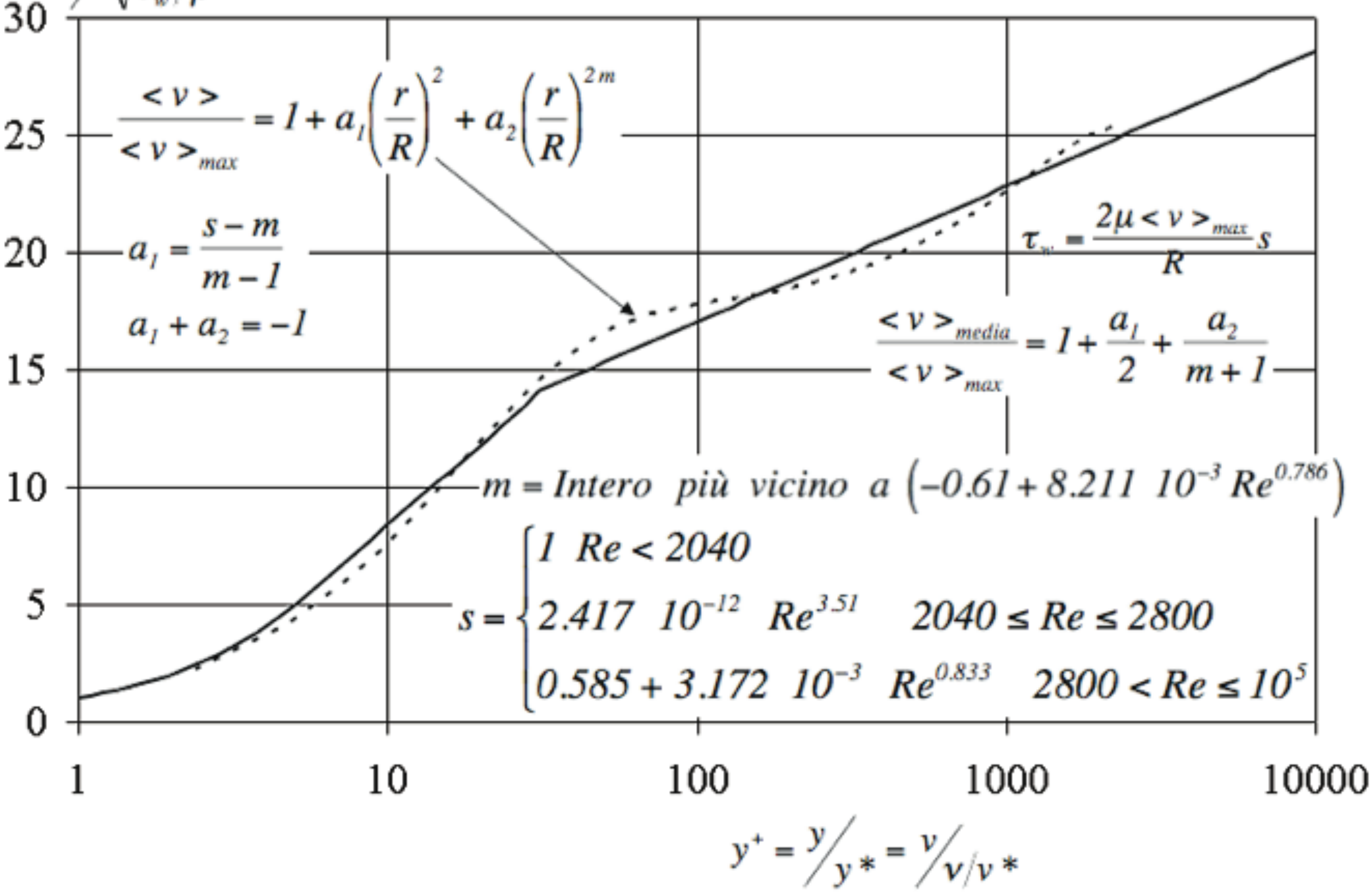


Il profilo universale di velocità consente di calcolare le diffusività

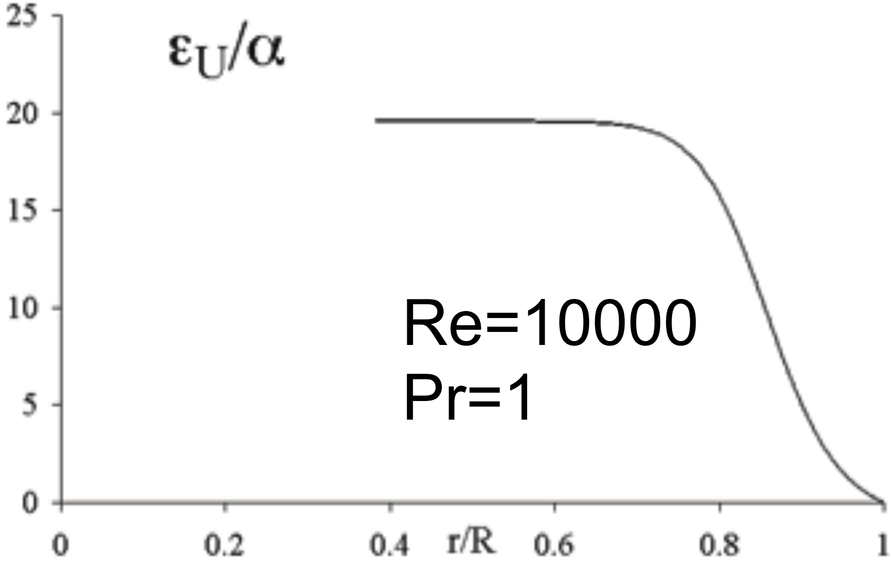
se è noto il profilo dello sforzo



L’eq. empirica di Pai consente di calcolare le diffusività se è noto il profilo dello sforzo



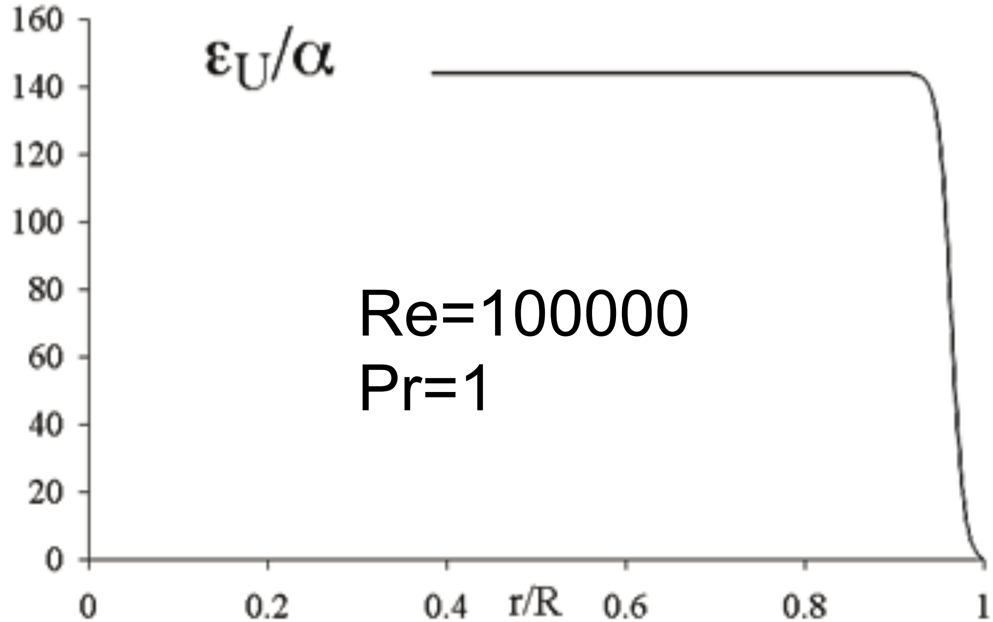
Profilo di diffusività turbolenta in un condotto



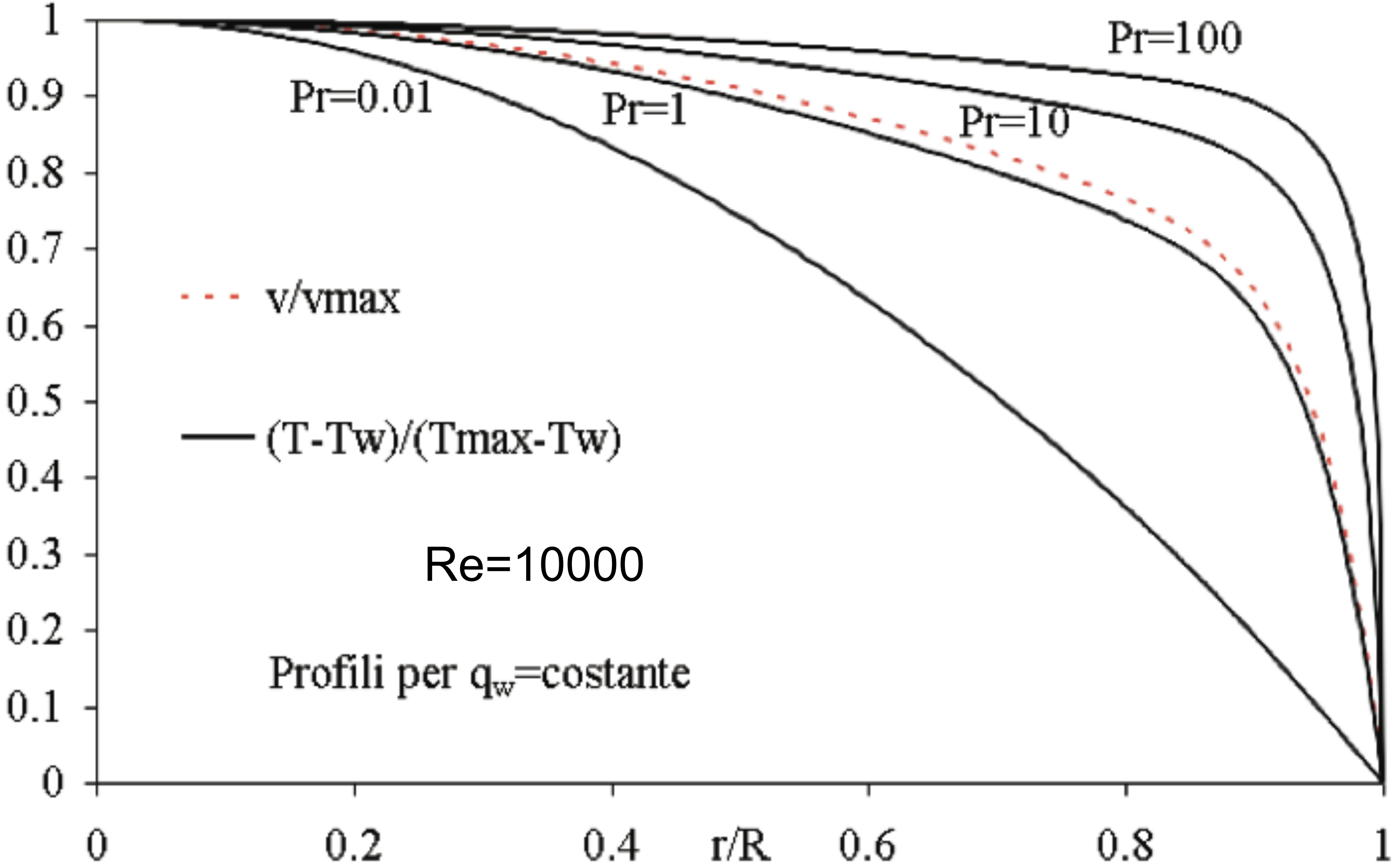
Alla parete la diffusività turbolenta è nulla (prevale il trasporto diffusivo), per un tratto che dipende dal numero di Reynolds

Allontanandosi dalla parete prevale il trasporto turbolento

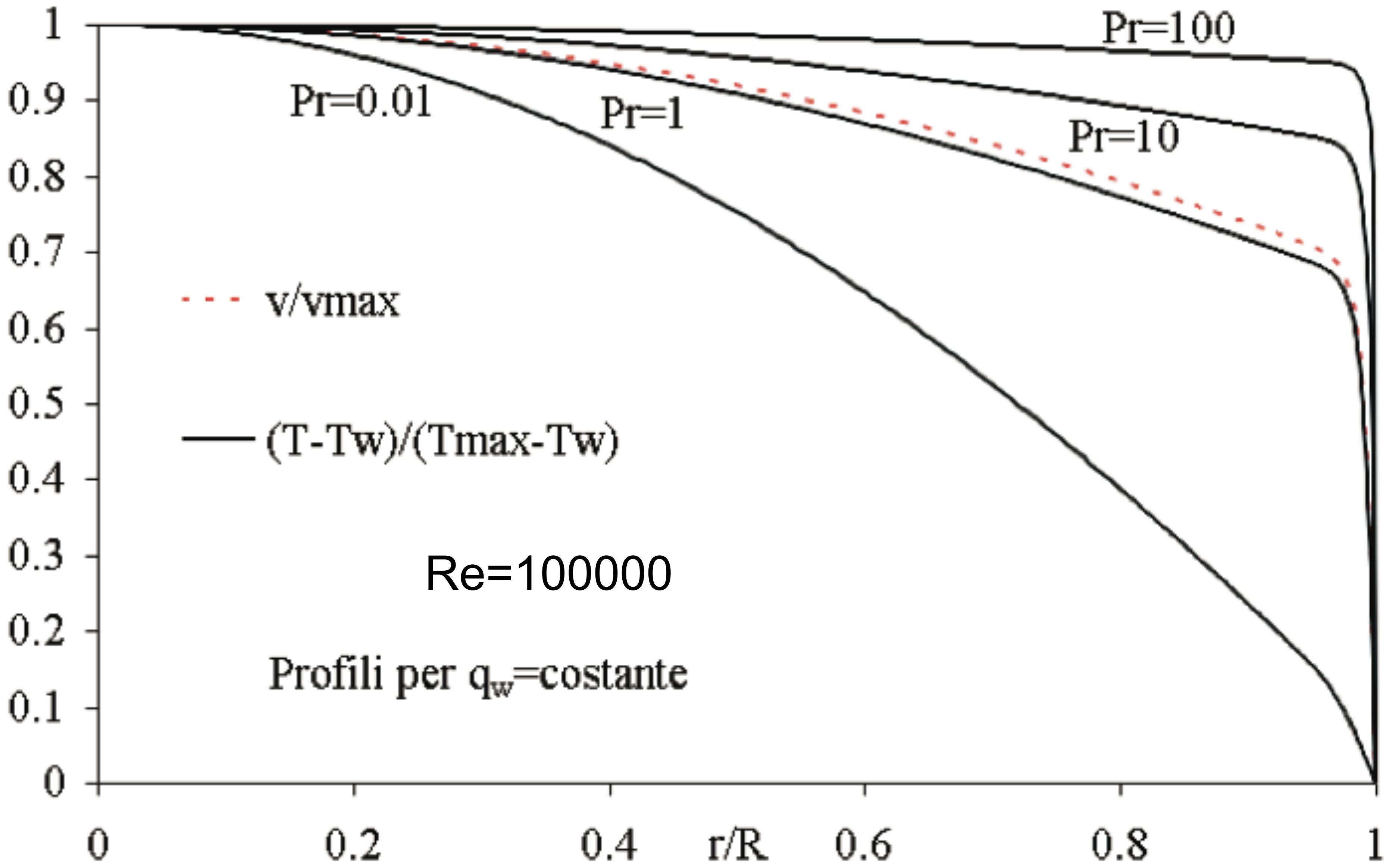
Al centro, la diffusività turbolenta è indeterminata perché sia lo sforzo che il gradiente di velocità tendono a zero



Profili di temperatura in moto turbolento

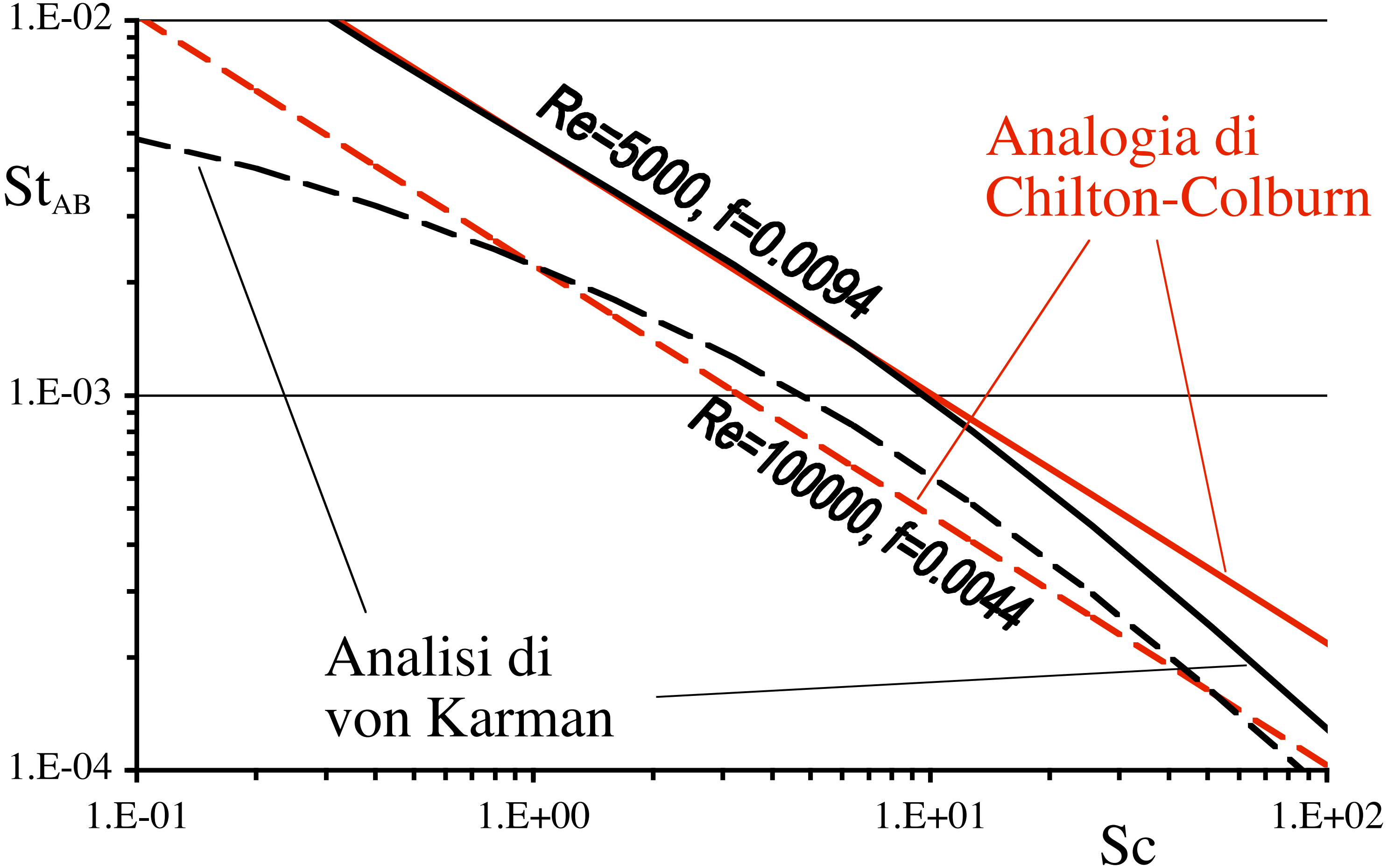


Profili di temperatura in moto turbolento



Coeff. di trasporto in moto turbolento

L'analisi di von Karman è basata sul profilo universale di velocità e sull'analogia di Reynolds.



L'analogia di Colburn funziona bene, e non solo per moto in condotti.

Oss.: per il coefficiente di scambio termico basta sostituire St e Pr a St_{AB} e Sc