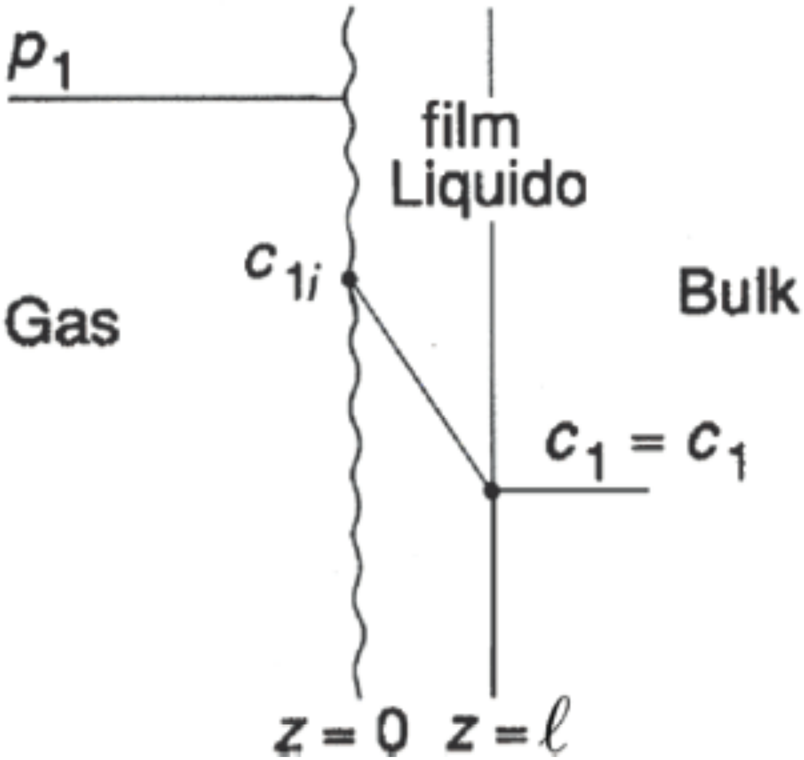
Teorie per il calcolo dei coefficienti di trasporto di materia
(interfaccia fluido-fluido)

Fenomeni di Trasporto

Teoria del film (Lewis, 1924)



Si assume che il trasporto di materia avvenga in uno strato sottile all'interfaccia in cui la concentrazione varia linearmente

$$N_1 = j_1|_{z=0} = \frac{D}{\ell}\left(c_{1i} - c_1\right)$$

$$N_1 = k\left(c_{1i} - c_1\right)$$

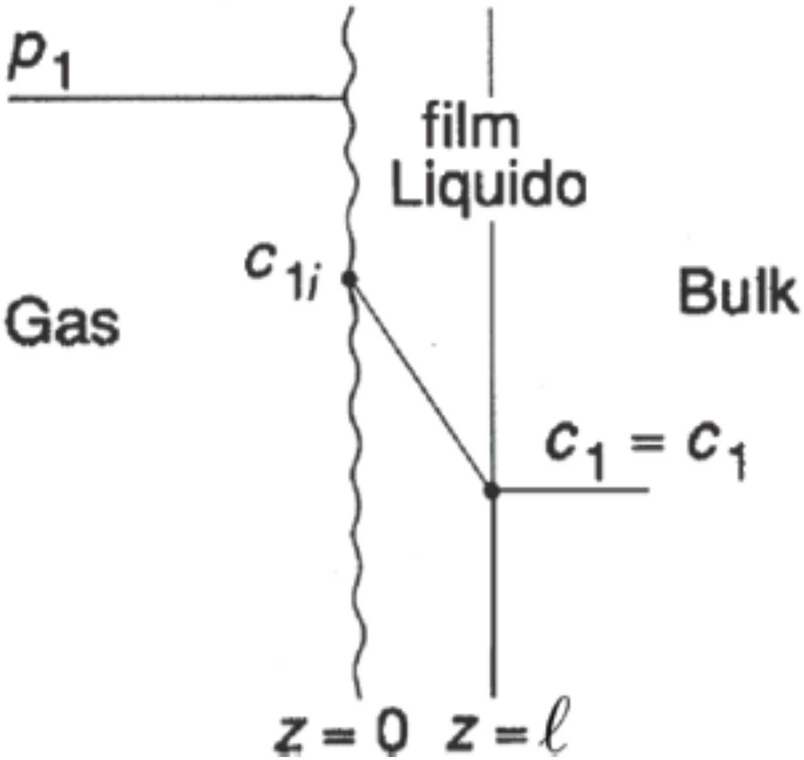
$$k = \frac{D}{\ell}$$

ℓ dipende dalla fluidodinamica e, solitamente,

$\ell \approx 0.01\text{-}0.1$mm per liquidi

$\ell \approx 1\text{-}10$mm per gas

Teoria del film: commenti



La teoria è molto semplice ed adatta per ragionare

Il profilo lineare è tipico dello stato stazionario, quindi la teoria non è adatta al transitorio

Il coefficiente di scambio dipende dalla diffusività alla prima potenza.

$$k = \frac{D}{\ell}$$

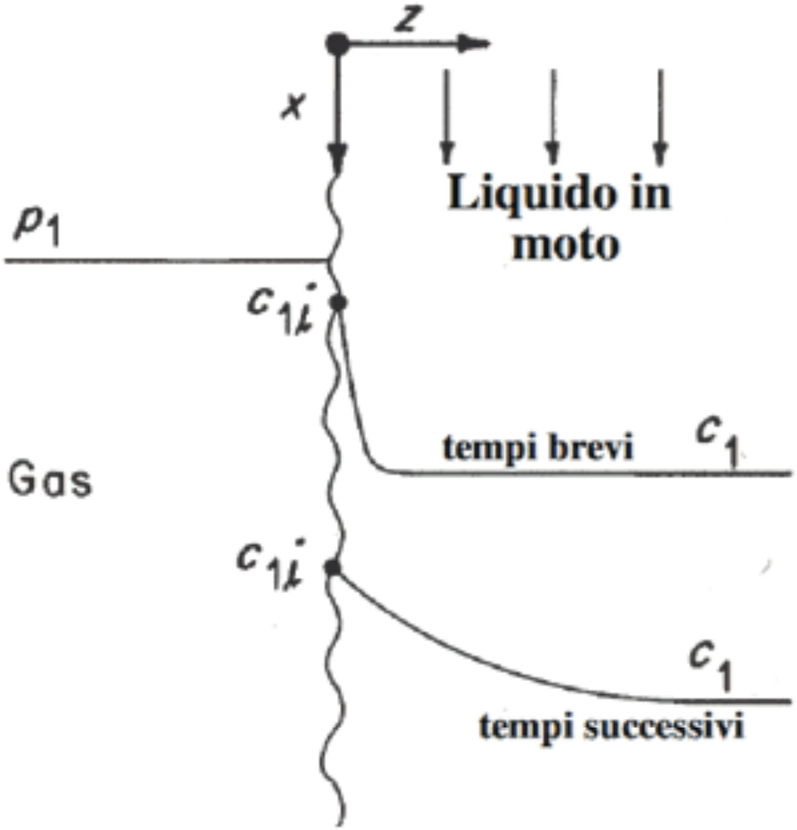
Sperimentalmente

$\boldsymbol{k \propto D^n}$

con

n che va da ~0 a 0.8-0.9

Teoria della penetrazione (Higbie, 1935)



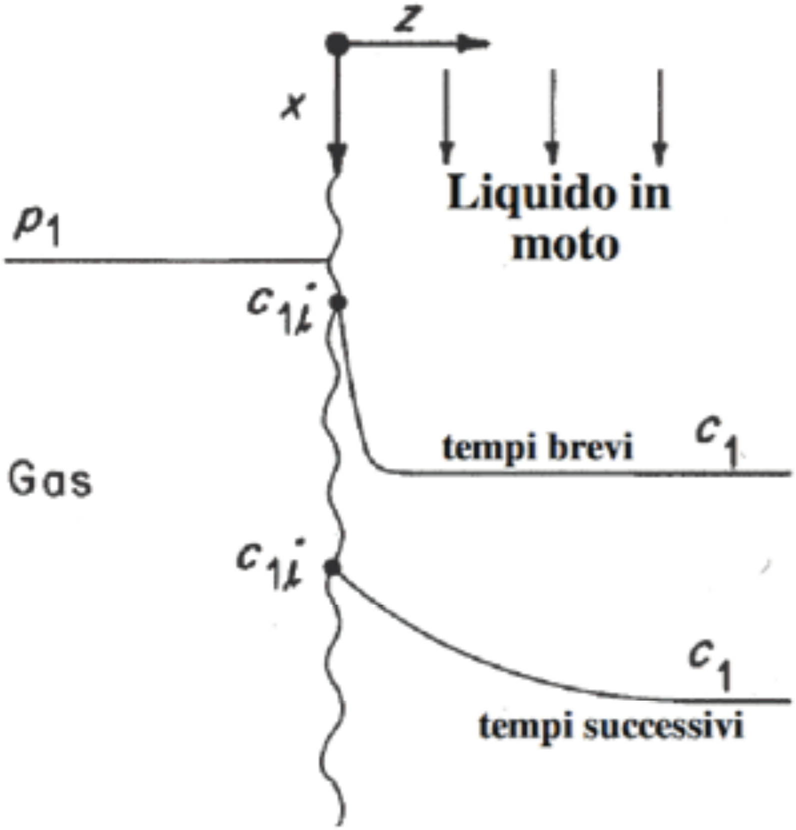
- Ad una **interfaccia liquido-gas** la velocità del liquido non è nulla, ma il profilo di velocità è piatto.
- Quindi esiste una velocità della superficie del liquido caratteristica di un certo spessore non nullo.
- Tale spessore si comporta, dal punto di vista del trasporto di materia, come un solido.

$$\overline{N}_1 = \frac{1}{L}\int_0^L \sqrt{D\,v_i/\pi\,x}\,\Delta c\,dx = 2\sqrt{D\,v_i/\pi\,x}\,(c_{1i} - c_1)$$

$$\overline{N}_1 = \overline{k}\,(c_{1i} - c_1)$$

$$\overline{k} = 2\sqrt{D\,v_i/\pi\,L}$$

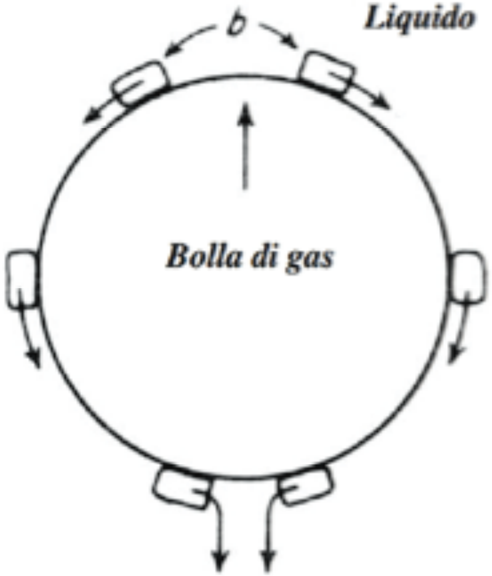
Teoria della penetrazione: commenti

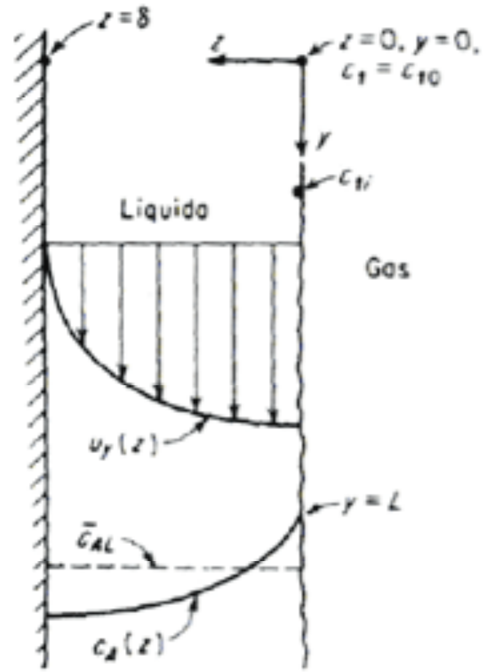


La teoria prevede $\boldsymbol{k} \propto \boldsymbol{D}^{1/2}$ in accordo con quanto si riscontra sperimentalmente

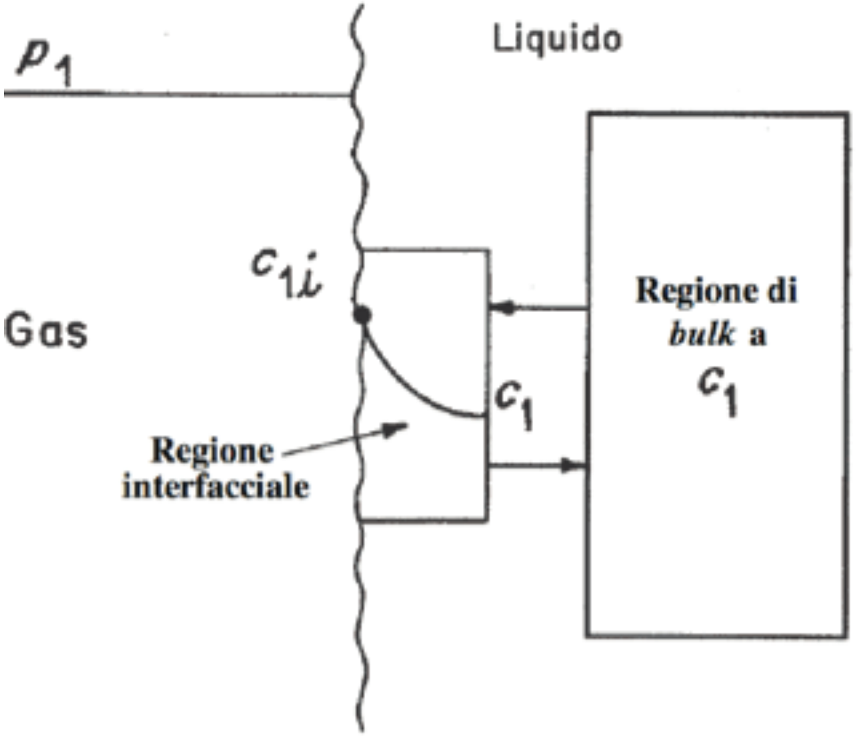
Essa è tuttavia ristretta a casi particolari in cui la fluidodinamica è semplice (ad es. una bolla di gas che sale in un liquido, o un film liquido cadente)

$$\bar{k} = 2\sqrt{D\, v_i / \pi L}$$





Teoria del rinnovamento superficiale



(Danckwerts, 1951)

È un’estensione della teoria della penetrazione, con cui si assume che i volumetti di fluido (in cui avviene la penetrazione di materia) sono presenti in superficie per un certo tempo prima di essere riassorbiti dal *bulk*

Ogni volume a contatto con la superficie ha una certa età (ossia un certo tempo di permanenza all’interfaccia)

Pertanto sulla superficie esistono elementi aventi età diverse

Teoria del rinnovamento superficiale

Si definisce una funzione di distribuzione delle età:

$\phi(t)\,dt$ = frazione di superficie costituita da elementi che hanno un'età compresa fra t e t+dt

Per definizione $\displaystyle\int_{t=0}^{\infty} \phi(t)dt = 1$

Il flusso medio (su tutta la superficie) è dato da

$$\overline{N}_1 = \int_{t=0}^{\infty} \boxed{\Delta C_1 \sqrt{\frac{D}{\pi t}}}\ \boxed{\phi(t)dt}$$

Frazione di superficie che ha quell'età

Flusso per un elemento di superficie di età t

Teoria del rinnovamento superficiale

Si definisce una funzione di distribuzione delle età:

$\phi(t)\,dt$ = frazione di superficie costituita da elementi che hanno un'età compresa fra t e t+dt

$\phi(t-dt)\,dt - \phi(t)\,dt = -\,d\phi(t-dt)\,dt$ = frazione di superficie i cui elementi sono scomparsi al tempo t

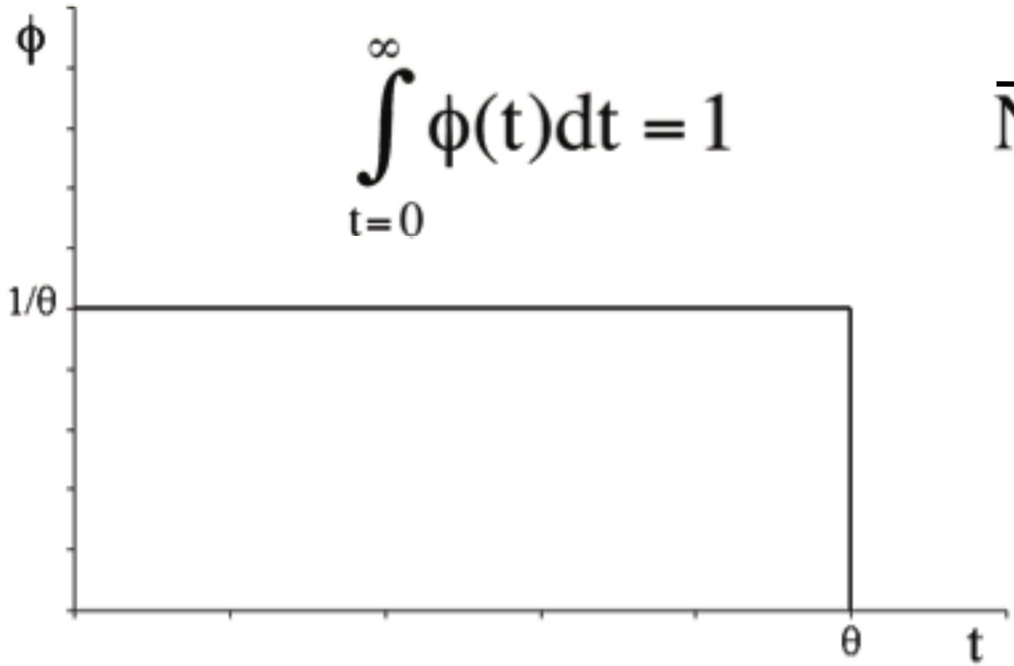
Se $d\phi(t-dt) < 0$ allora $\phi(t-dt)\,dt > \phi(t)\,dt$ e c'è stata una scomparsa di elementi al tempo t

Se $d\phi(t-dt)\,dt = -\,\phi(t-dt)\,dt$ allora non ci sono elementi di età superiore a t

Teoria del rinnovamento superficiale

Possiamo distinguere due casi limite:

Caso 1: massimo ordine
Tutti i tempi di permanenza, da 0 a θ, sono ugualmente rappresentati, e non esistono elementi di età superiore a θ



$$\int_{t=0}^{\infty} \phi(t)dt = 1$$

$$\bar{N}_1 = \int_{t=0}^{\infty} \Delta C_1 \sqrt{\frac{D}{\pi t}}\ \phi(t)dt$$

$$= \int_{t=0}^{\theta} \frac{\Delta C_1}{\theta} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} dt = 2\Delta C_1 \sqrt{\frac{D}{\pi \theta}}$$

$$\bar{k} = 2\sqrt{\frac{D}{\pi \theta}}$$

Oss.: in questo caso si ottiene lo stesso risultato ottenuto da Higbie

Teoria del rinnovamento superficiale

Possiamo distinguere due casi limite:

Caso 2: massimo disordine

La frazione di elementi che scompaiono al tempo t

$$-d\phi(t-dt)\, dt$$

può essere posta uguale a

$$K\, \phi(t-dt)\, dt\, dt$$

con K = scomparsa di elementi per unità di superficie e per unità di tempo = fattore di calamità

Si ottiene in definitiva

$$\phi'(t) = - K\, \phi(t)$$

e quindi (con K=costante)

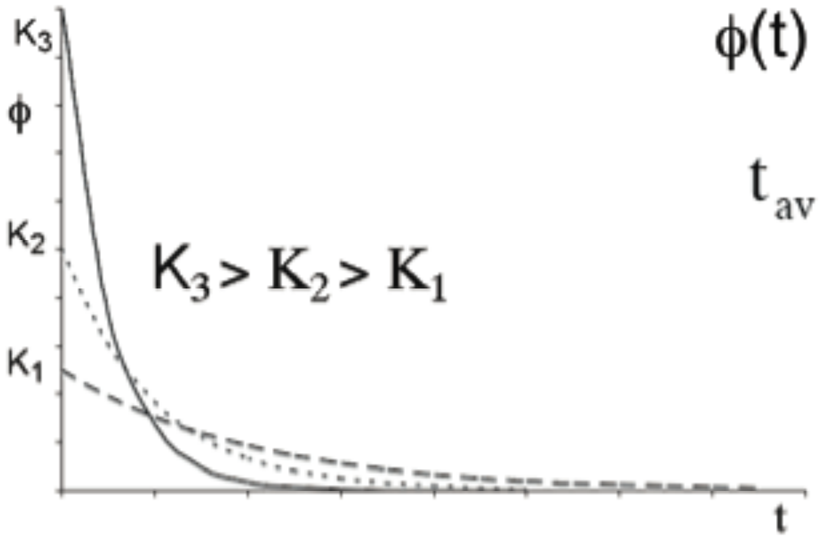
$$\phi(t) = K\, e^{- Kt}$$

Oss.: in questo caso la velocità di scomparsa non dipende dall'età, ma dalla quantità di elementi che hanno una data età

Teoria del rinnovamento superficiale

Possiamo distinguere due casi limite:

Caso 2: massimo disordine



$K_3 > K_2 > K_1$

$$\phi(t) = K\,e^{-Kt}$$

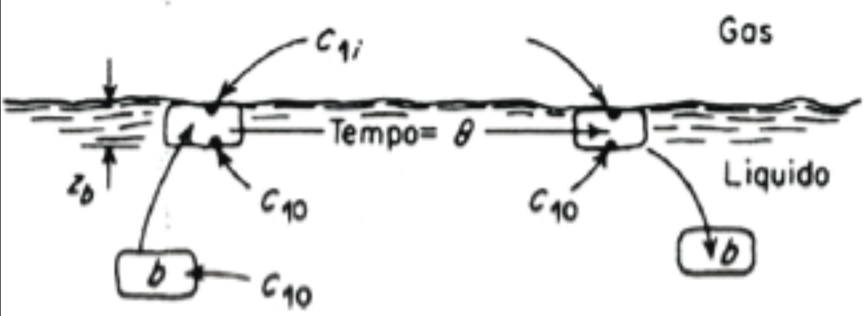
$$t_{av} = \int_0^{\infty} t\phi(t)dt = \int_0^{\infty} tKe^{-Kt}dt =$$

$$= -te^{-Kt}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-Kt}dt = -\frac{e^{-Kt}}{K}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{K}$$

$$\overline{N}_1 = \int_{t=0}^{\infty} \Delta C_1 \sqrt{\frac{D}{\pi t}}\phi(t)dt = \Delta C_1 \int_{t=0}^{\infty} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} Ke^{-Kt}dt = \Delta C_1 \sqrt{KD} = \Delta C_1 \sqrt{\frac{D}{t_{av}}}$$

$$\overline{k} = \sqrt{\frac{D}{t_{av}}}$$

Teoria del rinnovamento superficiale: commenti



$$\bar{k} = \sqrt{\frac{D}{t_{av}}}$$

La teoria prevede $\boldsymbol{k} \propto \boldsymbol{D}^{1/2}$ in accordo con quanto si riscontra sperimentalmente

k è inversamente proporzionale ad un tempo medio di vita (o di rinnovamento superficiale), che dipende solo dalla fluidodinamica del sistema e diminuisce all'aumentare dell'agitazione.

Il tempo di vita è generalmente incognito (come lo spessore ℓ del film); il suo ordine di grandezza è generalmente 10^{-2}-10^{-3}s

Oss.: la teoria assume profilo piatto di velocità all'interfaccia, quindi vale dal lato del fluido con viscosità più alta

Teorie per i coefficienti di trasporto di materia all'interfaccia liquido-gas

Teoria	**Risultato**
Film	$\bar{k} = \dfrac{D}{\ell}$
Penetrazione	$\bar{k} = 2\sqrt{D\, v_i / \pi L}$
Rinnovamento superficiale	$\bar{k} = \sqrt{\dfrac{D}{t_{av}}}$

Correlazioni per i coefficienti di trasporto di materia per bolle di gas

Conditions	Correlations	Comments E = Empirical, S = Semiempirical, T = Theoretical
Single bubbles of gas in liquid, continuous phase coefficient, very small bubbles	$N_{Sh} = \frac{k'_c d_b}{D_c} = 1.0(N_{Re}N_{Sc})^{1/3}$	[T] Solid-sphere $d_b < 0.1$ cm, k'_c is average over entire surface of bubble.
5-25-V, medium to large bubble	$N_{Sh} = \frac{k'_c d_b}{D_c} = 1.13(N_{Re}N_{Sc})^{1/2}$	[T] Use arithmetic concentration difference. Droplet equation: $d_b > 0.5$ cm.
5-25-W	$N_{Sh} = \frac{k'_c d_b}{D_c} = 1.13(N_{Re}N_{Sc})^{1/2}\left[\frac{d_b}{0.45 + 0.2d_b}\right]$	[S] Use arithmetic concentration difference. Modification of above (W), $d_b > 0.5$ cm. $500 \le N_{Re} \le 8000$. No effect SAA for $d_p > 0.6$ cm.
Rising small bubbles of gas in liquid, continuous phase	$N_{Sh} = \frac{k'_c d_b}{D_c} = 2 + 0.31(N_{Gr})^{1/3}N_{Sc}^{1/3}$, $d_b < 0.25$ cm	[E] Use with arithmetic concentration difference. $N_{Ra} = \frac{d_b^3\lvert\rho_C - \rho_L\rvert g}{\mu_L D_L}$ = Raleigh number. Note that $N_{Ra} = N_{Gr}N_{Sc}$. Valid for single bubbles or swarms. Independent of agitation as long as bubble size is constant.
5-25-Y, large bubbles	$N_{Sh} = \frac{k'_c d_b}{D_c} = 0.42\ (N_{Gr})^{1/3}N_{Sc}^{1/2}$, $d_b > 0.25$ cm; $\frac{\text{Interfacial area}}{\text{volume}} = a = \frac{6\,H_g}{d_b}$	[E] Use with arithmetic concentration difference. H_g = fractional gas holdup, volume gas/total volume. For large bubbles, k'_c is independent of bubble size and independent of agitation or liquid velocity. Resistance is entirely in liquid phase for most gas-liquid mass transfer.

Correlazioni per i coefficienti di trasporto di materia all'interfaccia fluido-fluido

Physical situation	Basic equation[b]	Key variables	Remarks
Liquid in a packed tower	$k\left(\frac{1}{\nu g}\right)^{1/3} = 0.0051\left(\frac{v^0}{a\nu}\right)^{0.67}\left(\frac{D}{\nu}\right)^{0.50}(ad)^{0.4}$	a = packing area per bed volume d = nominal packing size	Probably the best available correlation for liquids; tends to give lower values than other correlations.
	$\frac{kd}{D} = 25\left(\frac{dv^0}{\nu}\right)^{0.45}\left(\frac{\nu}{D}\right)^{0.5}$	d = nominal packing size	The classical result, widely quoted; probably less successful than above.
	$\frac{k}{v^0} = \alpha\left(\frac{dv^0}{\nu}\right)^{-0.3}\left(\frac{D}{\nu}\right)^{0.5}$	d = nominal packing size	Based on older measurements of height of transfer units (HTU's); α is of order one.
Gas in a packed tower	$\frac{k}{aD} = 3.6\left(\frac{v^0}{a\nu}\right)^{0.70}\left(\frac{\nu}{D}\right)^{1/3}(ad)^{-2.0}$	a = packing area per bed volume d = nominal packing size	Probably the best available correlation for gases.
	$\frac{kd}{D} = 1.2(1-\epsilon)^{0.36}\left(\frac{dv^0}{\nu}\right)^{0.64}\left(\frac{\nu}{D}\right)^{1/3}$	d = nominal packing size ϵ = bed void fraction	Again, the most widely quoted classical result.
Pure gas bubbles in a stirred tank	$\frac{kd}{D} = 0.13\left(\frac{(P/V)d^4}{\rho\nu^3}\right)^{1/4}\left(\frac{\nu}{D}\right)^{1/3}$	d = bubble diameter P/V = stirrer power per volume	Note that k does not depend on bubble size.
Pure gas bubbles in an unstirred liquid	$\frac{kd}{D} = 0.31\left(\frac{d^3 g\Delta\rho/\rho}{\nu^2}\right)^{1/3}\left(\frac{\nu}{D}\right)^{1/3}$	d = bubble diameter $\Delta\rho$ = density difference between gas and liquid	For small swarms of bubbles rising in a liquid.
Large liquid drops rising in unstirred solution	$\frac{kd}{D} = 0.42\left(\frac{d^3\Delta\rho g}{\rho\nu^2}\right)^{1/3}\left(\frac{\nu}{D}\right)^{0.5}$	d = bubble diameter $\Delta\rho$ = density difference between bubbles and surrounding fluid	Drops 0.3-cm diameter or larger.
Small liquid drops rising in unstirred solution	$\frac{kd}{D} = 1.13\left(\frac{dv^0}{D}\right)^{0.8}$	d = drop diameter v^0 = drop velocity	These small drops behave like rigid spheres.
Falling films	$\frac{kz}{D} = 0.69\left(\frac{zv^0}{D}\right)^{0.5}$	z = position along film v^0 = average film velocity	Frequently embroidered and embellished.

Notes: [a]The symbols used include the following: D is the diffusion coefficient; g is the acceleration due to gravity; k is the local mass transfer coefficient; v^0 is the superficial fluid velocity; and ν is the kinematic viscosity.
[b]Dimensionless groups are as follows: dv/ν and $v/a\nu$ are Reynolds numbers; ν/D is the Schmidt number; $d^3g(\Delta\rho/\rho)/\nu^2$ is the Grashoff number, kd/D is the Sherwood number; and $k/(\nu g)^{1/3}$ is an unusual form of Stanton number.