

- a. Calcolare il tempo necessario perché l'acqua raggiunga la rotazione di un corpo solido se il bidone viene improvvisamente posto in rotazione a 3000 rpm.
- b. Calcolare il tempo necessario perché l'acqua, in un bidone di dimensioni doppie rispetto al primo, ruoti come un corpo rigido con le velocità di 2000 rpm e 3000 rpm.
- 8.29. L'acqua del problema 8.28 è sostituita con della glicerina. Calcolare i tempi per il nuovo ed il vecchio cilindro, con le velocità di 2000 rpm e 3000 rpm.
- 8.30. Due fluidi scorrono in una camera cilindrica di miscela dove vengono mescolati a regime stazionario da una ruota a pale che gira a 50 rivoluzioni al secondo, come mostrato in figura P8.30. Si suggerisce di ridimensionare il procedimento per una quantità doppia di liquidi mescolati. Poiché la miscela originaria è soddisfacente, è preferibile la similitudine completa. Una proposta di progetto è quella di raddoppiare la sezione trasversale di tutte le tubature e di mantenere l'altezza della camera cilindrica di miscela, aumentando però il suo diametro di $\sqrt{2}$. Un'altra proposta è quella di mantenere la vecchia struttura ma di raddoppiare le portate nei tubi. Dire se queste proposte permettono di rispettare la similitudine, e se è così, calcolare la dimensione ed il numero delle rivoluzioni della ruota a pale.
- 8.31. Calcolare i parametri di similitudine per il colpo d'ariete descritto nell'esempio 4.10.

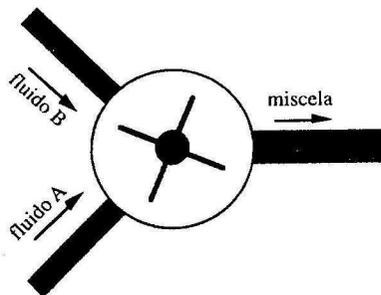


Figura P8.30
Miscelatore con ruota a pale.

CAPITOLO 9

CORRENTI CON ACCELERAZIONE TRASCURABILE

I termini non lineari del primo membro delle equazioni di Navier risultano dall'accelerazione del fluido. Sappiamo già che questi termini contribuiscono molto alle difficoltà che si incontrano nella risoluzione delle equazioni. In effetti, abbiamo potuto notare la relativa facilità con cui si è ricavata la soluzione esatta nel capitolo 6 per le correnti a moto massimo, dove scompaiono questi termini non lineari. Poiché ora cerchiamo delle approssimazioni, già ottenute dalla risoluzione di forme approssimate delle equazioni di Navier, la prima idea è quella di eliminare i termini che comportano le maggiori difficoltà, cioè i termini non lineari relativi all'accelerazione.

La materia da noi trattata è la fluidodinamica, ed in questo contesto bisogna chiedersi se esistano correnti reali in cui siano trascurabili i termini dell'accelerazione, e se esistono, come identificarli. La risposta a queste domande è che esistono almeno due famiglie di correnti di questo tipo: *le correnti in spazi stretti e le correnti di scorrimento*.

9.1. Correnti in spazi stretti

Consideriamo la corrente bidimensionale di un fluido incompressibile nello stretto spazio tra due lastre, come mostrato in figura 9.1. Per semplicità supponiamo che le lastre siano piane. I risultati ottenuti con questa analisi si possono estendere ai casi in cui le lastre sono curve, finché lo spazio tra di esse è molto più piccolo del raggio di curvatura. È possibile estenderli anche alle correnti tridimensionali, dove esiste anche una componente w della velocità. Qui presentiamo i casi più semplici di correnti in spazi ristretti e limitiamo l'analisi alle correnti bidimensionali tra lastre piane. La lastra inferiore è fissata all'asse x mentre quella superiore si può inclinare rispetto ad essa di un piccolo angolo α . Se la lastra superiore si sposta, il suo moto è limitato al suo stesso piano. Una corrente che scorre tra due lastre così disposte si dice *corrente in uno spazio stretto* quando

$$\frac{\delta}{L} \ll 1, \quad \alpha < \frac{\delta}{L}. \quad (9.1)$$

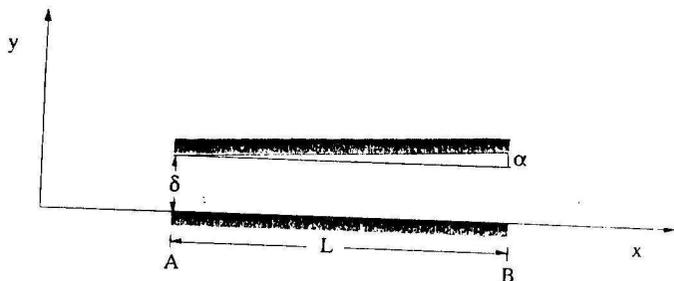


Figura 9.1
Corrente in uno spazio stretto.

Definiamo \bar{u} , la velocità media nella direzione x , nel seguente modo

$$\bar{u} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u \, dy.$$

Per la conservazione della massa si ha

$$\bar{u}_A \cdot \delta = \bar{u}_B (\delta + L\alpha).$$

Perciò

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \approx \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right| \approx \frac{\bar{u}_B - \bar{u}_A}{L} = \bar{u} \frac{\alpha}{\delta}. \quad (9.2)$$

L'equazione di continuità (5.21) stabilisce che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Tenendo conto dell'equazione (9.2) si ha così

$$\left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \approx \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \approx \left| \frac{\bar{u}\alpha}{\delta} \right|. \quad (9.3)$$

Le condizioni al contorno per v su entrambe le lastre sono

$$v = 0 \quad \text{per } y = 0 \quad \text{e per } y = \delta.$$

Il valore massimo che $|v|$ può raggiungere, vicino al centro dello spazio tra le lastre, è approssimativamente

$$|v|_{\max} = \frac{\delta}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \approx \left| \frac{\bar{u}\alpha}{2} \right| \ll |\bar{u}|. \quad (9.4)$$

La componente y della velocità può essere trascurata se paragonata alla componente x . Inoltre, per la lastra superiore, in movimento o stazionaria, si ha

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \approx \frac{\bar{u}}{\delta}, \quad (9.5)$$

e con l'equazione (9.2)

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \approx \alpha < \frac{\delta}{L} \ll 1.$$

La derivata in x di u è trascurabile se paragonata alla derivata in y .

Dunque la forma approssimata delle equazioni di Navier per correnti bidimensionali in spazi stretti diventa

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (9.7)$$

9.2. La teoria di Reynolds della lubrificazione

Un'applicazione importante delle correnti in spazi stretti, per le quali si trascurano i termini dell'accelerazione, è la teoria di Reynolds della lubrificazione. Questa teoria permette di ricavare le forze che compaiono nei cuscinetti e su altre superfici di scorrimento lubrificate, nell'ipotesi implicita che si possano effettivamente trascurare le forze derivanti dall'accelerazione.

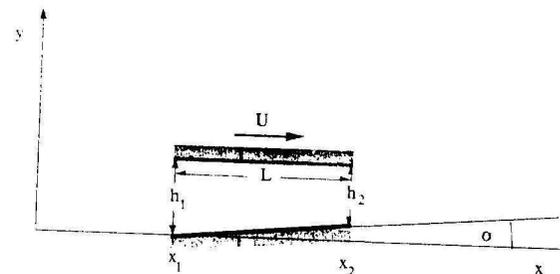


Figura 9.2
Corrente in un cuscinetto.

Consideriamo la corrente bidimensionale a regime stazionario tra due lastre, mostrata in figura 9.2. L'equazione della quantità di moto nella direzione x corrisponde all'equazione (9.7), che sembra proprio quella di una corrente a moto massimo*. Se la lastra superiore si muove a velocità U , l'equazione (9.7) ha la soluzione [si veda la corrente di taglio con gradiente di pressione, eq. (6.24)]

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) y[y - h(x)] + U \frac{y}{h(x)}. \quad (9.8)$$

* L'equazione (9.8) è una soluzione con $h(x)$ che varia molto lentamente, il che giustifica $\partial^2 u / \partial x^2 = 0$

Assumendo $w = 0$ (per un cuscinetto molto largo), la portata in massa tra le lastre si conserva:

$$\dot{m} = \int_0^{h(x)} \rho u dy = \frac{1}{2} \rho U h(x) - \frac{\rho}{12\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) h^3(x) = \text{cost} = \frac{1}{2} \rho U h_0 \quad (9.9)$$

da cui

$$\frac{dP}{dx} = 6\mu U \frac{h - h_0}{h^3} \quad (9.10)$$

La lastra inferiore di figura 9.2 è inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo

$$\alpha \cong \frac{dh}{dx}$$

Possiamo dunque scrivere

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dh} \cdot \frac{dh}{dx} = \alpha \frac{dP}{dh},$$

che può essere sostituita nell'equazione (9.10) per arrivare a

$$\frac{dP}{dh} = 6\mu \frac{U}{\alpha} \cdot \frac{h - h_0}{h^3} \quad (9.11)$$

Per integrazione si ottiene

$$P = 6\mu \frac{U}{\alpha} \left[-\frac{1}{h} + \frac{h_0}{2h^2} \right] + B$$

e h_0 e B devono soddisfare le condizioni al contorno

$$P = P_0 \quad \text{per } h_1 \text{ e per } h_2.$$

Questo si verifica ponendo $2/h_0 = 1/h_1 + 1/h_2$. Quindi

$$P - P_0 = 6\mu \frac{U}{\alpha} \frac{(h - h_1)(h - h_2)}{(h_1 + h_2)h^2} \quad (9.12)$$

La portata in massa si ricava dall'equazione (9.9):

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \rho U h_0 = \frac{1}{2} \rho U \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2} \quad (h_1 > h_0 > h_2) \quad (9.13)$$

La forza di sollevamento L per unità di larghezza che agisce sulla lastra superiore è

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_1}^{x_2} (P - P_0) dx = \frac{1}{\alpha} \int_{h_1}^{h_2} (P - P_0) dh \\ &= 6\mu \frac{U}{\alpha^2} \left[\frac{2(h_2 - h_1)}{h_1 + h_2} - \ln \frac{h_2}{h_1} \right] = \frac{6\mu U L^2}{(k-1)^2 h_2^2} \left[\ln k - \frac{2(k-1)}{k+1} \right], \end{aligned} \quad (9.14)$$

dove $k = h_1/h_2 > 1$, $L = x_2 - x_1 = \frac{1}{\alpha}(h_2 - h_1)$. La forza resistente viscosa D per unità di larghezza che agisce sulla lastra superiore è

$$D = \int_{x_1}^{x_2} \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=h} dx = \int_{h_1}^{h_2} \left[\frac{1}{2} h \frac{dP}{dh} + \mu \frac{U}{\alpha h} \right] dh = \mu \frac{U}{\alpha} \int_{h_1}^{h_2} \left[3 \frac{h - h_0}{h^2} + \frac{1}{h} \right] dh.$$

Dunque

$$D = \frac{2\mu U L}{(k-1)h_2} \left[2 \ln k - \frac{3(k-1)}{k+1} \right] \quad (9.15)$$

Per ricavare la massima forza di sollevamento si impone $dL/dk = 0$, da cui si ottiene

$$k = 2,2,$$

che corrisponde a

$$L = 0,4\mu U R, \quad D = 1,2\mu U R, \quad D/L = 3/R \quad (9.16)$$

dove

$$R = \frac{2L}{h_1 + h_2}.$$

Esempio 9.1

La figura 9.3 mostra un disco rotante con un lettore magnetico mobile. La velocità lineare del disco in corrispondenza del lettore è di 60 m/s. La larghezza della piastra del lettore è $L = 0,02$ m ed il peso che deve sopportare è di 5 g/cm in direzione radiale. Il braccio del lettore è posto ad un angolo α quando è sollevato nella posizione più alta, altrimenti è libero di muoversi, e cioè di assumere una posizione corrispondente alle altezze h_1 e h_2 . L'intero sistema è immerso in azoto a 300 K. Trovare h_1 , h_2 e α . Calcolare la forza resistente viscosa che agisce sul lettore.

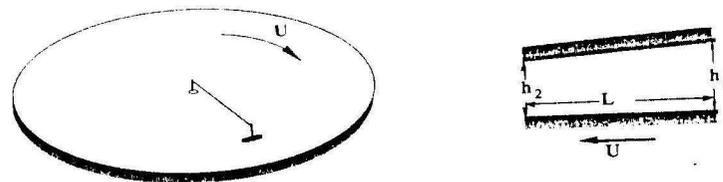


Figura 9.3
Disco rotante e lettore magnetico.

Soluzione

La forza di sollevamento necessaria a sostenere un peso di 5 g/cm è

$$L = \frac{5 \times 10^{-3} \times 9,81}{10^{-2}} = 4,905 \text{ N/m}.$$

Per il sollevamento massimo si ha

$$k = \frac{h_1}{h_2} = 2,2$$

$$\frac{h_1 - h_2}{L} = \frac{h_2(k-1)}{L} = 1,2 \frac{h_2}{L} = \tan \alpha.$$

Per l'azoto a 300 K si ha $\mu = 17,84 \times 10^{-6} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$. Dall'equazione (9.14) per la forza di sollevamento si ricava h_2 :

$$L = \frac{1}{h_2^2} \frac{6\mu UL^2}{k-1} \left[\ln k - 2 \frac{k-1}{k+1} \right]$$

da cui

$$4,905 = \frac{1}{h_2^2} \frac{6 \times 17,84 \times 10^{-6} \times 60 \times 0,02^2}{1,2} \left[\ln 2,2 - \frac{2 \times 1,2}{3,2} \right] = \frac{8,23 \times 10^{-8}}{h_2^2}$$

Dunque

$$\begin{aligned} h_2 &= 1,3 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,13 \text{ mm}, \\ h_1 &= kh_2 = 0,286 \text{ mm}, \\ \alpha &= 0^\circ 26,8' = 0,0078 \text{ radianti}. \end{aligned}$$

La forza resistente si ricava dall'equazione (9.15):

$$\begin{aligned} D &= \frac{2\mu UL}{(k-1)h_2} \left[2 \ln k - \frac{3(k-1)}{k+1} \right] \\ &= \frac{2 \times 17,84 \times 10^{-6} \times 60 \times 0,02}{1,2 \times (1,3 \times 10^{-4})} \left[2 \ln 2,2 - \frac{3 \times 1,2}{3,2} \right] = 0,124 \text{ N/m}. \end{aligned}$$

9.3. Correnti di scorrimento

Non abbiamo ancora trovato le forme approssimate delle equazioni di Navier, in cui si trascurano i termini non lineari. Poiché questi termini, da cui derivano le complicazioni, sono non lineari nella velocità, vengono forzati a diventare molto piccoli quando le velocità diminuiscono. Da qui il nome di *correnti di scorrimento*. Questo concetto viene espresso in maniera più esatta con l'uso del numero di Reynolds.

Il numero di Reynolds, $Re = VL/\nu$, può diventare piccolo perché è piccola la velocità caratteristica V , oppure per un basso valore della lunghezza caratteristica L , o per un alto valore della viscosità cinematica ν . Naturalmente, è la combinazione VL/ν che determina la grandezza di Re . Comunque, se si osserva la costante di tempo $\Omega = L/\tau V$ ed il numero di Eulero $Eu = \pi/\rho V^2$, scegliamo la soluzione per la quale Re è piccolo per un basso valore di V , essendo perciò implicito che Ω e Eu non sono necessariamente piccoli. L'equazione (8.14) moltiplicata per Re diventa

$$Re \cdot \Omega \frac{\partial u}{\partial t} + Re \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -Eu \cdot Re \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (9.17)$$

Per valori non troppo bassi di $Re \cdot \Omega = L^2/\nu\tau$ e $Eu \cdot Re = \pi \cdot L/\mu V$, i termini inerziali nelle parentesi quadre vengono trascurati e l'equazione prende la forma

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} = -Eu \cdot Re \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (9.18)$$

con due equazioni analoghe per le componenti y e z delle equazioni della quantità di moto. Supponendo che la corrente sia incomprimibile, l'equazione di continuità (8.11) assume la stessa forma. Entrambe le equazioni sono scritte nella loro forma vettoriale:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} &= 0, \\ \Omega \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} &= -Eu \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{q}). \end{aligned}$$

Le correnti descritte dalle equazioni (9.19) e (9.20) sono dette *correnti di scorrimento di Stokes*. Le equazioni sono lineari e hanno alcune proprietà che sono utili in generale per la loro risoluzione. Consideriamo la divergenza dell'equazione (9.20). Il termine a primo membro diventa:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial t} (0) = 0,$$

perché $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$, come risulta dall'equazione (9.19). Il secondo termine diventa invece:

$$\nabla \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{q})) = \nabla \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{q})] = 0;$$

Questo termine si annulla perché la divergenza di un rotore di qualunque vettore è identicamente nulla. L'unico termine che rimane dell'equazione (9.20) è

$$\nabla^2 p = 0.$$

Quindi la pressione delle correnti di scorrimento è una funzione armonica, cioè soddisfa l'equazione di Laplace.

L'equazione (9.21) non è utile come potrebbe sembrare perché le condizioni al contorno in funzione di p non sono sempre note; questa equazione, tuttavia, viene usata in molti casi.

Per correnti indipendenti dal tempo una forma generale alternativa si può ricavare dal rotore dell'equazione (9.20). Poiché $\nabla \times (\nabla p) = 0$ per qualunque scalare p , ne risulta

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{q} = 0.$$

L'equazione (9.22) è particolarmente utile per le correnti in cui la direzione del vettore velocità è nota a priori, come ad esempio per le correnti bidimensionali e asimmetriche.

9.4. Correnti bidimensionali

Per le correnti bidimensionali con vettore velocità $\mathbf{q} = iu + jv$ si ha

$$\nabla \times \mathbf{q} = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) \times (iu + jv) = k \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Considerando il rotore di $\nabla \times \mathbf{q}$ si ottiene

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{q}) = i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - j \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$