Esercitazione sul primo principio della termodinamica

Aria (Cv=5/2 R; Cp=7/2 R), inizialmente alla pressione P_1 = 1 bar e alla temperatura T_1 = 35°C, viene compressa fino alla pressione P_2 = 6 bar, alla temperatura T_2 = 35°C.

Calcolare il lavoro, il calore scambiato, la variazione di energia interna e la variazione di entalpia quando il passaggio dallo stato 1 allo stato 2 avvenga secondo i tre seguenti meccanismi:

a) compressione a temperatura costante;
b) riscaldamento a Volume costante e successivo raffreddamento a Pressione costante;
c) compressione adiabatica e successivo raffreddamento a Volume costante.

Soluzione

Si consideri una base di calcolo di 1 mole di aria.

Caso a)

Per una compressione isoterma, per gas ideale si ha $\Delta U = 0$ e $\Delta H = 0$, quindi il primo principio si riduce a $W = -Q$.

$$dW = -PdV$$

per gas ideale
$$dW = -\frac{RT}{V}dV$$

in forma integrata
$$W_{1\to 2} = -RT\ln\frac{V_2}{V_1}$$

a temperatura costante
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

quindi
$$W_{1\to 2} = -Q = RT\ln\frac{P_2}{P_1} = 4588 \text{ J/mol}$$

Caso b)

Si calcolano i volumi occupati nei due stati 1 e 2 (R = 8.314 J/(mol K))

V_1 = 0.0256 m^3 V_2=0.0042 m^3

La prima parte della trasformazione avviene a V_1 = costante: il gas si riscalda passando da P_1 a P_2 e raggiungerà una temperatura T_2.

$$T_2 = \frac{P_2 V_1}{R} = 1846 \text{ K}$$

Essendo il volume costante, in questo primo passaggio si ha $W = 0$ e $Q_1 = \Delta U = Cv\ \Delta T = 31970$ J/mol.

Raffreddando a pressione costante (P_2) fino a raggiungere la temperatura di 35°C, si ha $Q_2 = \Delta H = Cp\ \Delta T = -44750$ J/mol.

Il calore totale è dato dalla somma di Q_1 e Q_2 : Q =-12840 J/mol

Essendovi variazione di volume, si ha anche lavoro $W = -P\Delta V = 12840$ J/mol

Caso c)

Durante la compressione adiabatica il gas passerà da V_1 a V_2, ma non sono noti i valori della temperatura (T_2*) alla fine della compressione adiabatica, nè quelli della pressione (P_2*), che pertanto devono essere calcolate tenendo conto che per il processo adiabatico si ha $dQ=0$.

Si utilizza sempre la formulazione del primo principio che nel caso specifico fornisce

$$dU = dW$$

ovvero sia $$Cv\,dT = -PdV$$

e, utilizzando la legge dei gas, $$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{Cv}\frac{dV}{V}$$

sapendo che $$Cp = Cv + R$$

e posto che $$\gamma = \frac{Cp}{Cv}$$

si ha $$\frac{dT}{T} = (1-\gamma)\frac{dV}{V}$$

considerando il rapporto tra Cp e Cv costante, si può integrare fino ad ottenere

$$\ln\frac{T_2 *}{T_1} = (1-\gamma)\ln\frac{V_2}{V_1}$$

o, ancora, $$\frac{T_2 *}{T_1} = \frac{V_1}{V_2}^{(\gamma-1)}$$

E' opportuno ricordare che, in maniera analoga a quanto visto prima, si può pervenire alle seguenti relazioni

$$\frac{T_2*}{T_1} = \frac{P_2*}{P_1}^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}$$

$$\frac{P_2*}{P_1}^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}} = \frac{V_1}{V_2}^{(\gamma-1)}$$

Si ricavano T_2*=621 K e P_2* = 12.25 bar e si calcola il lavoro (il calore essendo nullo).

Nel raffreddamento a volume costante, il sistema viene portato da 621 K a 308 K (35°C). Non essendoci variazione di volume, il lavoro è nullo mentre il calore scambiato è dato da $Q_1 = \Delta U = Cv\ \Delta T$.